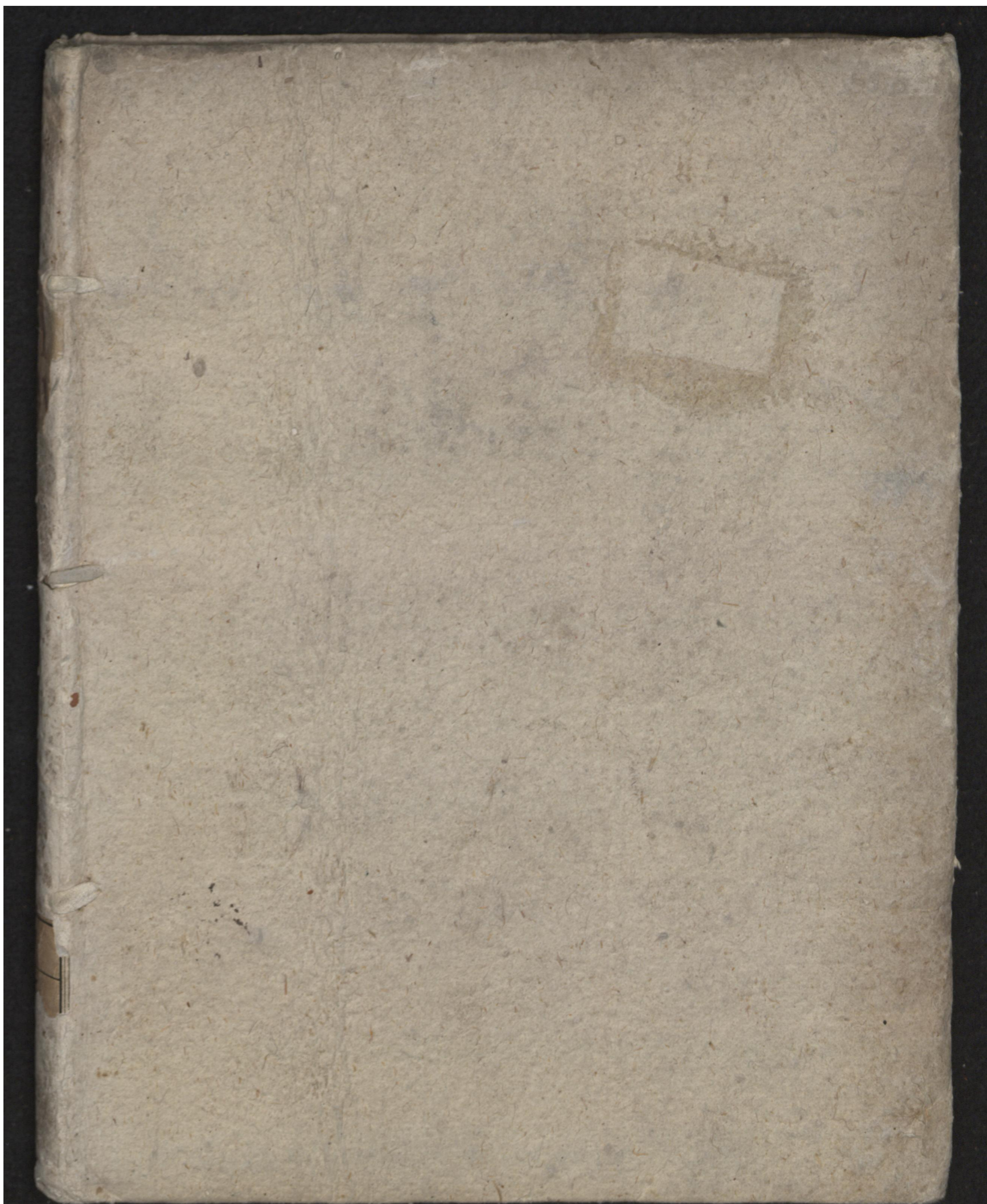
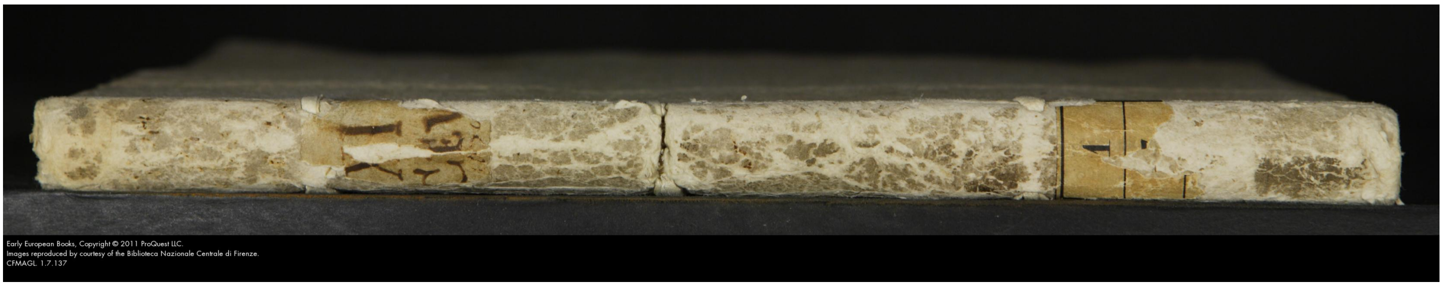
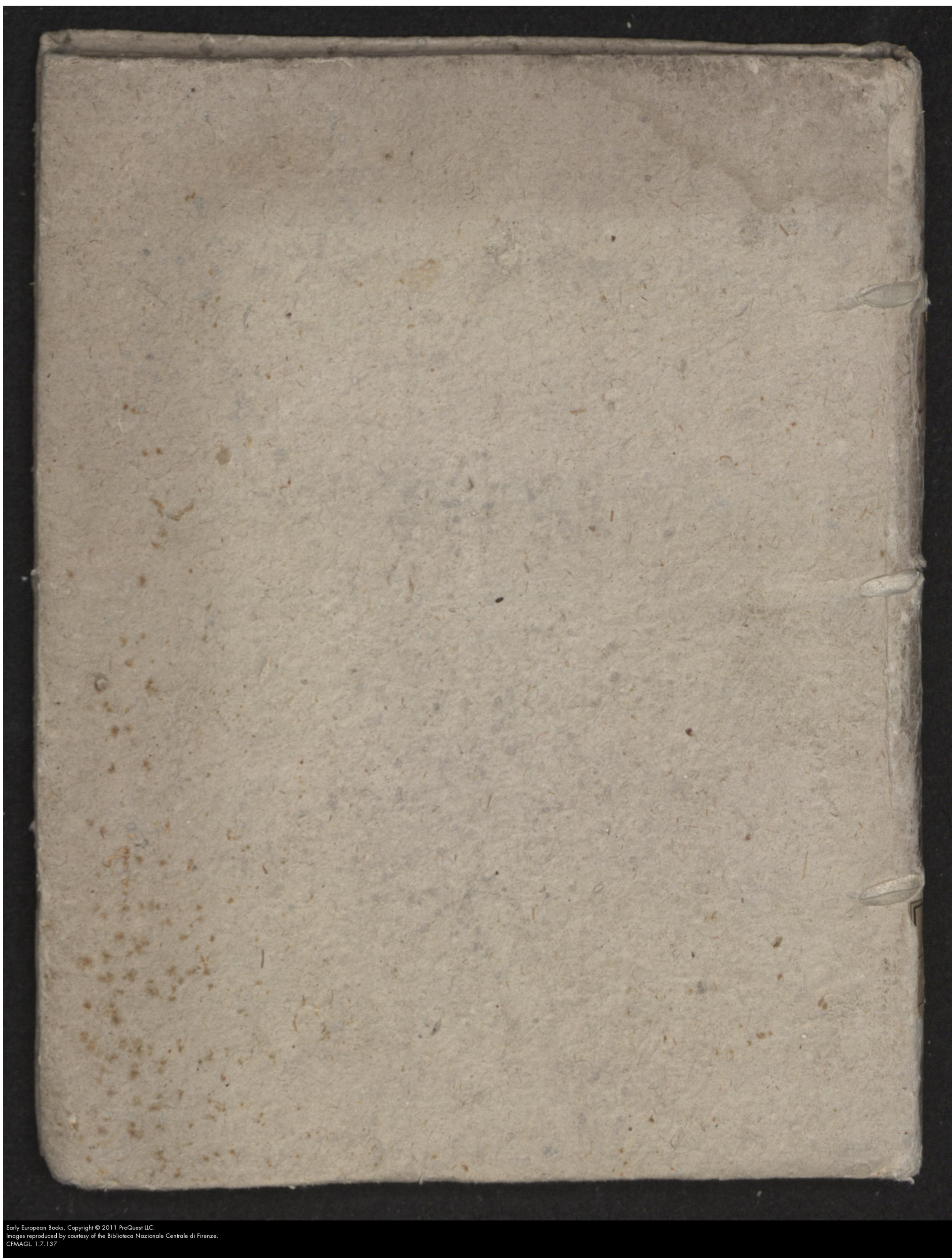
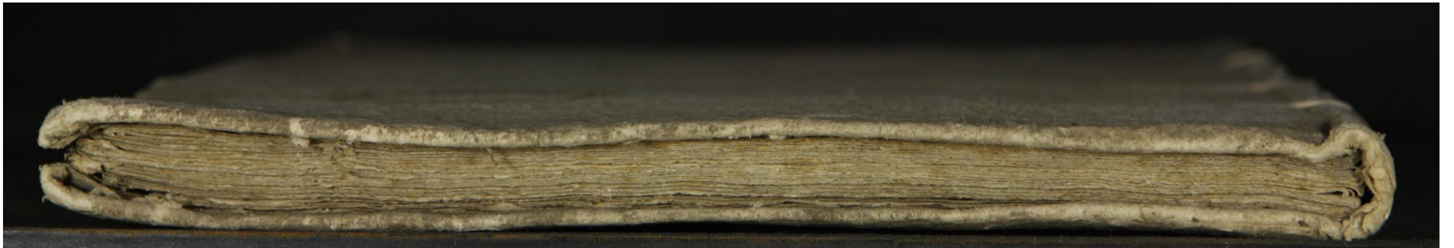
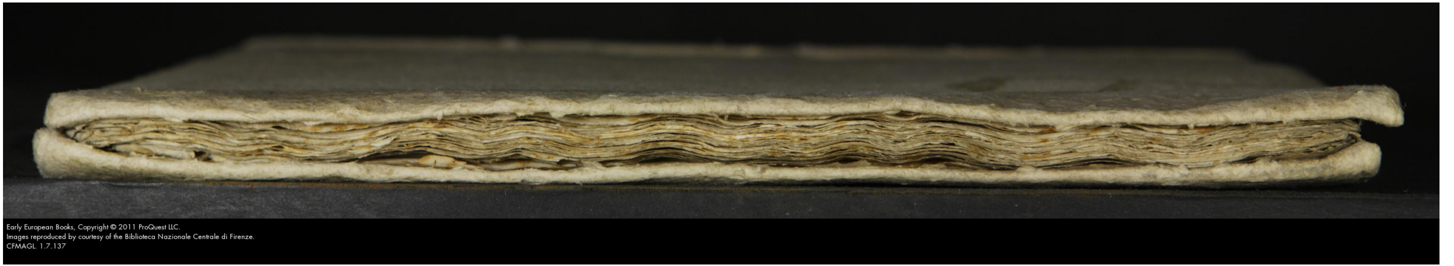












XI
CEV.

DE
LINEIS RECTIS
SE INVICEM SECANTIBVS
STATICA CONSTRVCTIO:

AD SERENISSIMVM

FERDINANDVM
CAROLVM

Ducem Mantuæ, Montisferrati, Guaſtallæ, &c.

AVCTORE

IOANNE CEVA
Mediolanenſi.





MEDIOLANI
Ex Typographia Ludouici Montiæ. MDCLXXVIII.
SVPERIORVM PERMISSV.



SERENISSIMO MANTVÆ DVCI

FERDINANDO CAROLO.

TImerem, Sereniſſime Dux, præfigere tam ſplendida nomina exiguo huic libello, niſi publici iuris eſſet, præſidio Principum ſe, atque ſua tueri. Scilicet Sereniſſimos hos Soles lucere omnibus voluit luminum Pater, & Moderator Deus, vt latè proijcerent beneficum iubar ſuper vulgus

mortalium. Quod si vnicuique fas est bona, fortunasq; suas credere tam grandi patrocinio; quantò æquius hoc idem sibi deposcunt inermes literæ, præsertim Geometria, cui si desit Mæcenatum vmbra, deest vigor omnis & vita. Nam amœnior literatura, cæteræque scientiæ ferme omnes habent theatra, porticus, & propugnatores suos; pauci verò Geometriæ latus stipant, pauci scientiarum omnium Reginæ excubias agunt. Nihil illi splendida prosunt natalia, nihil dignitas, nihil collata mortalibus beneficia. Illam igitur tibi supplicem sisto verende Princeps, vt ex hoc Serenissimo fastigio Celsitudinis Tuæ patrocinium sibi vindicet & tutelam. Te interim, Heros fortissime, seruent Superi nobis, & bonis artibus incolumem diù. Hanc

enim

enim præcelſam indolem tuam, & magnæ mentis perſpicaciam, hoc robur animi, clementiam, & decus auguſtæ frontis nemo eſt, qui non ſuſpiciat, atq; in his non cenſeat collocatam ſpem maximam publicæ felicitatis. Vale.

Sereniſsimæ Celſitudinis Tuæ

Humillimus Seruus

Ioannes Ceua,



PROOEMIVM.



Onsideranti mihi sæpius in hac vicissitudine rerum, ac fortunarum, quam opportunum foret calamitatum leuamen philosophari, quamque ij felices demum, fortunatiq; habendi essent, quos ab otio scientiarum nullæ auocant, atque seiungunt curæ; subijt animum, erigere (quantum fas eßet) literis, ingenioque territam infortunijs adolescentiam meam. Itaque geometriam ingressus, quæ & rerum varietate, & genere ipso cæteris anteire visa est, cum Apollonij, Archimedis, Pappi, aliorumque inuenta egregia, atque miranda percellerent animum, raperentque (vt est præceps sine consilio iuuentus) libuit dare vela ventis, si fortè noua littora, & nemini hactenus cognitas regiones casus aliquis aperiret. Quadraturam circuli, & adhuc indomitam hyper-

bolam

bolam rimari cæpi; videlicet spem fecerant haud exiguam frustum cylindricum, solidumque hyperbolicum totum penè à me in pyramidem coactum. Ter mihi conciliata recti, et curui dissidia insomnes noctes persuasere; ter normam fugit figura contumax, et tenax sui. Tamen, vt frustratis semel, iterumque laboribus lux aliqua, spesque noua subinde oriebatur, tandiu relabenti saxo Sisyphus peruicax inhæsi, donec adhibita nouissimè irrito successu indiuisibilia Cauallerij omnem animi pertinaciam domuere. Ergo auocato hinc animo (neque enim sine altiori consilio positum hoc frænum humanis mentibus crediderim) geometricis, ac mecanicis rationibus iunctis inuicem, permixtisque, nouum quidpiam in lucem proferre concessit Deus, solatium aliquod delusi in rebus magnis ingenij. Namque consuetis geometriæ apparatibus relictis, substitutisque linearum vice ponderibus, dum rationes quasdam examino successit cogitatio, pluraque sepulta hactenus, atque ignota prodiere in lucem. Rei nouitas, atque vtilitas persuasit hoc qualecunque inuentum publici iuris facere, ratus aliorum ingenio, ac perspicacia (vt sæpe fit) rude, impolitumque initium perfectum iri.

Insti-

Institutum nostrum est problemata quamplura, quorum ardua, & sæpe etiam inextricabilis foret solutio iuxta consuetas leges, nulla adhibita circulorum, linearumque præuia constructione, vt mos est apud geometras, solis ponderibus staticè enodare; quod præstabimus, quoties proponantur lineæ se inuicem secantes, quarũ sectiones ita sint determinatæ, vt qualibet variata, cæteras omnes variari necesse sit. Hinc staticam constructionem libuit appellare, quæ vtinam eius emolumenti sit, compendijque quod mihi persuadeo, & quod vnum oro, cupioq;. Neque enim ad hæc scribenda cupiditas vlla famæ impulit, quam in tanta rerum, auctorumque celebritate insani esset querere, leuiorisque animi desiderare. Plura inuenies minus castigata, et quibus desit suprema manus; da veniam succisiuis horis, quas mihi ad hæc elaboranda vix reliquere, partim curæ seueriores, partim etiam amicorum, et familiarium querimoniæ malè in his collocatum iuuentutis florem existimantium. Si quid porrò haud omnino contemnendum fuerit, Donato Rossetto inter Mathematicos nostri æui egregio, præstantissimoque, cuius primis institutionibus, si quid in me est bonarum artium, debeo, tu quoque humanissime lector debes. Vale.

STA-

STATICÆ CONSTRVCTIONIS LIBER PRIMVS.

AXIOMATA.

I.

Grauia ex communi centro grauitatis suspensa, ita ponderant, ac si tota eorum grauitas esset in prædicto centro grauitatis.

II.

Pondera in eadem positione vnicũ habent centrũ grauitatis.

PETITIO.

Proposito quolibet pondere aliud reperiri posse ad quod habeat datum pondus quamlibet imperatam rationem.

LEMMA I.

Pluribus datis ponderibus in qualibet positione, si ex centro grauitatis vnius, vel plurium eorum ducatur libra, quæ transeat per centrum grauitatis omnium, ea producta transibit per centrum grauitatis reliqui ponderis.



SINT pondera ABCD, quorum omnium grauitatis centrum sit E, illud autem ponderum AD sit F, ducaturque FE; dico quod si producatur ad partes reliquorum ponderum BC, in ipsorum centrum cadet; si enim hoc non est, sit G centrum grauitatis ponderum BC, itaut iuncta FG sit extra lineam FE. Quoniam igitur FG iungit centra grauitatis ponderum BC, AD, si fiat vt BC ad AD, ita longitudo FM ad MG, erit in eadem libra FG centrum grauitatis eorumdem quatuor ponderum BCDA in priori illa positione manentium, quod cum vnicum sit, non erit E, vt ponebatur. tab. I. fig. I.

COROLLARIVM.

HInc manifestum est, quod si duo grauia BC iungantur libra aliqua BC, eorum centrum grauitatis erit in communi

ſectione H libræ B C iungentis centra grauium B C, & lineæ F H
tab. I. *tranſeuntis per prædicta centra F, & E.* Centrum enim gra-
fig. 2. uium B C tam eſt in F H, vt probatū eſt, quam in B C, ergo erit H.

LEMMA II.

Sint duo pondera A B, quorum centrum grauitatis ſit F in libra A B, dico pondus A ad B eſſe, vt B F ad F A.

tab. I. SI enim ita non eſt, ſit vt A ad B, ita B K ad K A; erit ergo K
fig. 3. centrum grauitatis ponderum A B; quod cum vnicum ſit,
6. Arch. æquipond. non erit F, vt ponebatur.

PROP. I. PROB. I. ELEMENTVM I.

Sint duæ rectæ E A, C A, conuenientes in A, quibus occurrant duæ aliæ C D, E B, in D B punctis, quæ ſe inuicem ſecent in F. Propoſitum nobis ſit ex punctis E C A grauia I H G in ea ratione ſuſpendere, vt pondus G ad H eandem habeat rationem, quam C B ad B A; idem verò G ad I, eam quam E D ad D A; pondus verò I ad duo H G illam, quam habet B F ad F E, & graue H ad duo grauia I G ſit, vt D F ad F C.

tab. I. REperiatur pondus H ad quod propoſitum quoduis G illam
fig. 4. habeat rationem, quam recta C B ad B A; idem verò pon-
Poſtulatum. dus G ad aliud I eam habeat rationem, quam habet recta E D ad D A; dico rectam B F ad F E eſſe, vt pondus I ad duo grauia G H; rectam verò D F ad ipſam F C, vt pondus H ad duo pondera I G.

Quoniam D C eſt quædam libra, in cuius extremo D eſt cen-
axioma I. trum grauitatis, & propterea totum pondus grauium G I, ac ſi vnum eſſent ſuſpenſum ex D; in alio verò extremo C eſt aliud pondus H, erit in eadem libra D C centrum grauitatis prædictorum ponderum G I, & H. Similiter, quia E B eſt alia quædam libra, in cuius extremo B eſt centrum grauitatis, & propterea totum pondus grauium G H; in alio verò extremo E eſt aliud pondus I, erit in eadem libra E B centrum grauitatis prædictorum ponderum G H, & I in priori illa poſitione exiſtentium.

ex primo lem. Cùm itaque pondera G I H in eodem ſitu conſiderata vnicum habeant centrum grauitatis; id verò tàm in libra D C, quàm in

libra

libra E B ostensum fuerit, in sectione F necessariò existet. Ergo vt pondus I ad duo simul GH, ita BF ad FE; Similiter vt pondus H ad alia duo simul GI, ita erit D F ad F C, quod erat faciendum. *ex 2. lem.*

COROLLARIVM.

Deducitur punctum F esse centrum grauitatis omnium grauium IGH in illa positione.

SCHOLIVM.

Hanc propositionem, & quatuor, quæ deinceps sequuntur elementa voco, vtpotè prima fundamenta, quibus pleraq; nituntur.

Figuram hanc A E F C, iterum post tradita elementa, & non rarò exponemus; sed ad vitandam multiplicitatem literarum, pondera G I H literis A E C significabimus; aggregatum verò ex ponderibus G H, & alterum ex G I connotabimus litera B, & litera D, quippe quæ notant centrum grauitatis, in quo ponderant grauia suspensa ex A, & C, & ex A, & E; omnia verò pondera exprimemus litera F, quia ibi, vtpotè in centro grauitatis ponderant, vt dictum est.

PROP. II. PROB. II. ELEM. II.

Sit triangulum E A C, & ab angulis ipsius ducantur ad idem punctum F intra triangulum lineæ E F, A F, C F, quæ ex F productæ occurrant lateribus in punctis deinceps B K D; Institutum est, ex prædictis angulis E A C suspendere grauia I G H; ita vt pondus G ad I sit vt E D ad D A; idem G ad H, vt C B ad B A; H ad I, vt E K ad K C; pondus I ad duo G H, vt B F ad F E; pondus verò H ad duo I G, vt D F ad F C, & demum, vt vnicum G ad duo I H, ita K F ad F A.

Fiat vt C B ad B A, ita pondus G ad H, & vt E D ad D A, ita idem pondus G ad I. *tab. 1. fig. 5.*

Quoniam igitur figura E D B A C F est illa primi elementi, estq; C B ad B A, vt G ad H, recta verò E D ad D A, vt G ad I; etiam D F ad F C, erit vt pondus H ad duo pondera I G; itemque B F ad F E, vt pondus I ad duo G H.

Insuper quia F est centrum grauitatis, in quo est pondus grauiũ I G H, producta A F transibit per K centrum reliqui ponderis I H, *corol. p. 1. lem. 1.*

lem. 2. ergo vt pondus I ad H, ita CK ad KE.

Rursus, quia A K est quædam libra, in cuius extremis A K sunt pondera G, & I H, erit in eadem libra A K centrum grauitatis prędictorum ponderum I G H, quod cum sit vnicum, sitque in vtraque
ax. 2. libra D C, E B vt superius ostendimus erit necessariò in F; ergo
lem. 2. erit vt K F ad F A, ita pondus G ad duo simul I H, quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Cum hæc eadem reponetur figura, aggregatum ponderum I H, significabimus litera K, est enim in K centrum grauitatis, & propterea pondus grauium I H.

PROP. III. PROB. III. ELEM. III.

In triangulo E A C se inuicem secent duæ lineæ in G, quarum E B ducta ex vertice E secet basim in B, altera F D occurrat lateribus A E, C E, in F, & D. Propositum nobis sit ex angulis eiusdem trianguli grauia suspendere; I in puncto C; duo L K in E, atque vnicum H in A, adeout K ad I sit vt recta C D ad D E; I ad H, vt A B ad B C; H ad L, vt E F ad F A; L K ad H I, vt B G ad G E, & duo H L ad duo K I, vt D G ad G F.

tab. I. fig. 6. SIt L quodlibet pondus, & reperiatur aliud H ad quod primum pondus L eam rationem habeat, quam A F ad F E. Ponatur deinde I, ad quod pondus H habeat illam rationem, in qua est C B ad B A; item inueniatur pondus K, ad quod pondus I habeat rationem, quam E D ad D C; dico problema esse absolutum.

Quoniam enim F D est quædam libra, in cuius extremo F est centrum, & ideò pondus grauium H L; in alio verò extremo D, est pondus grauium K I (cum eorum grauitatis centrum sit in puncto D) erit in eadem libra F D centrum grauitatis prædictorum ponderum H L K I. Similiter quoniam E B est libra in cuius extremo E sunt grauia L K, in alio verò extremo B est pondus grauium H I, erit in eadem libra E B centrum grauitatis eorumdem ponderum L K H I in eadem priori positione existentium: cum igitur tàm in libra F D, quam B E sit centrum grauitatis ponderum L K H I, cumque illud vnicum sit, erit in communi sectione G, & propterea L K ad H I erunt, vt recta B G ad G E, & vt K I ad L H, ita F G ad G D, quod erat &c.

SCHO-

SCHOLIVM.

Aggregatum ponderum L K significabimus litera E; pondus H litera A, & pondus I litera C connotabit; duo pondera K I exprimet D, duo L H litera F, & duo H I litera B indicabit; pondus verò L more analytico, seu algebrico ita scribemus F - A, hoc est F minus A, eademque ratione pondus K ita scribemus D - C; omnia verò pondera L H I K litera G significabit.

PROP. IV. PROB. IV. ELEM. IV.

Inter duas quasdam lineas A C, E F secent se inuicem in D tres lineæ E C, A F, B G; oportet suspendere ex punctis A C E F grauia I H K L, itaut pondus L ad K sit vt recta E G ad G F; K ad H, vt C D ad D E; H ad I, vt A B ad B C; I ad L, vt F D ad D A; & denique duo I H ad duo K L se habeant vt G D ad D B.

POndus quoddam I ad L habeat eam rationem, quam F D ad D A; L ad K eam, quam E G ad G F; & K ad H illam, quam C D ad D E. Dico iam problemati nos satisfecisse. *tab. 1. fig. 7.*

Quoniam G est centrum grauitatis grauium K L, idemq; D est centrum grauitatis, tùm grauium I L, cùm ipsorum K H, erit propterea punctum D centrum quatuor grauium K L H I; ducitur verò libra G B ex G per D, ergo punctum B, in quo secat libram A C erit centrum grauitatis reliquorum ponderum I H; quare vt est pondus H ad pondus I, ita A B ad B C. Rursus quoniam B G est quædam alia libra, in cuius extremo B est centrum grauitatis, & propterea pondus grauium I H, & similiter in alio extremo G pondus grauium K L, erit in eadem libra B G centrum grauitatis prædictorum omnium grauium I H K L, quod cum vnicum sit, existatque in D, erit vt I H ad K L, ita G D ad D B, quod &c.

SCHOLIVM.

Ponderibus I H L K correspondebunt deinceps literæ A C F E; duobus verò I H litera B; duobus K L litera G; omnibus I H L K litera D; pro I L vsurpabimus A † F, hoc est A plus F, similiterq; pro duabus K H alias duas literas E † C minimè verò literam D, quæ significat omnia pondera I H L K, vt diximus.

PROP.

PROP. V. PROB. V. ELEM. V.

Sit quadrilaterum AHIC, & in illo duæ lineæ BFG, EFD, oppositis lateribus occurrentes in punctis BGED, & se inuicem secantes in F; proportio autem lineæ IG ad GH sit composita ex rationibus partium reliquorum laterum, rectarum videlicet AE ad EH, CB ad BA, & ID ad DC. Propositum est pondera NM LK ex angulis HACI suspendere, ita vt pōdus K ad L sit vt CD ad DI; L ad M, vt AB ad BC; M ad N, vt HE ad EA; N ad K, vt IG ad GH; & duo grauia simul NM ad duo LK simul, vt DF ad FE; tandem, vt duo NK ad duo ML, ita BF ad FG.

tab. 1. fig. 8. Fiat pondus K ad L vt CD ad DI; L verò ad M vt BA ad BC, & M ad N vt HE ad EA; dico N ad K esse vt IG ad GH, & duo NM ad duo LK, vt DF ad FE.

Nam pondus N ad K componitur ex rationibus ponderum N ad M, M ad L, L ad K; Sed ex constructione, vt N ad M, ita recta AE ad EH; vt M ad L, ita recta CB ad BA; & vt L ad K, ita ID ad DC; ergo N ad K componitur ex rationibus rectarum AE ad EH, CB ad BA, & ID ad DC: verùm ex eisdem rationibus componitur (vt suppositum est) proportio rectæ IG ad GH; ergo vt IG ad GH, ità reciprocè pondus N ad K; itaque punctum G est centrum grauitatis ponderum NK: & quia BG est quædam libra, in cuius extremo B est centrum grauitatis, atque adeò totum pondus grauium ML; itemque in alio extremo G pondus est grauium NK; erit in ipsa libra GB centrum grauitatis omnium grauium MLNK. Rursus ED est alia libra, in cuius extremo E est centrum, & ideo pondus grauium NM, & in alio extremo D est eadem ratione pondus grauium LK; quare in hac etiam libra ED reperitur centrum grauitatis eorumdem grauium NMKL in illa priori positione. Cum igitur tam in libra GB, quàm in DE sit centrum grauitatis prædictorum ponderum MLKN, illudque sit vnicum, erit in communi sectione F; itaque vt duo simul pondera ML ad NK, sic erit GF ad FB, atque, vt duo MN ad duo KL, ita DF ad FE, quod &c.

COROLLARIVM.

Elicitur ex hac propositione, quod licet prædictum sic sectum

qua-

quadrilaterum non in eodem plano iaceat, semper tamen iunctæ ED, BG in vnico plano sunt; & vlterius ea omnia contingunt, quæ supra ostendimus. Cum enim demonstratum sit in vtraque libra ED, GB existere centrum grauitatis omnium grauium NMLK, necesse est vt habeant aliquod punctum commune, in quo se inuicem secent, quod cum ita sit, in eodem plano existent.

SCHOLIVM.

Pondera MLKN exprimemus deinceps literis ACIH; duo verò ML litera B; duo LK litera D; duo KN litera G; duo NM litera E indicabimus; sicuti, & quatuor NMLK litera F exprimemus.

Constructis iam, explicatisque his quinque elementis, quæ vtilitas, seriesq; varia Theorematum ex eorum commixtione sit sequtura, & quanto Geometriæ bono, cuius fines amplificare hoc qualicumque inuento conati sumus, palam ex sequentibus propositionibus constabit.

LEMMA III.

SIt B centrum grauitatis ponderum AC. Dico pondus B, aggregatum videlicet grauium AC ponderantium in B esse ad pondus C, vt AC ad BA. Quoniam B est centrum grauitatis ponderum AC, erit A ad C, vt CB ad BA, ergo componendo erit pondus B ad C, vt CA ad BA, quod &c. *tab. 1. fig. 9.*

PROP. VI. PROB. VI.

Exposita primi elementi figura AECF, intelligantur in AEC pondera disposita AEC eo modo, quo ibi exposita fuere pondera GIH, ita vt D sit centrum grauitatis ponderum AE; B ponderum AC, F omnium erunt itaque quatuor rationes AB ad BC, AD ad DE, EF ad FB, & CF ad FD, quarum duæ quælibet si secundùm numeros dentur, reliquas duas inuestigabimus.

HVius problematis sunt sex casus; etenim (vt ex arte combinatoria) ductis quatuor (quot videlicet rationes sunt datæ) in tria, numerum scilicet vnitate deficientem exurgit 12, cuius medietas 6 præbet nobis numerum binariorum in quos distribui potest prædictus numerus 4.

Dentur

tab. 1. *fig.* 4.

Dentur igitur primò duæ rationes E F ad F B, & C F ad F D, prior ſit vt 2 ad 1, altera autem vt 3 ad 2; debemus modo manifeſtare reliquas duas rationes C B ad B A, & E D ad D A.

Quoniam pondus B (aggregatum videlicet ex A C) ad C eſt (ex præmiſſo tertio lemmate) vt recta A C ad A B: componitur verò ratio ponderis B ad C ex rationibus ponderum B ad F, & F ad C: vt verò B ad F, ita E F ad E B, & vt F ad C, ita D C ad D F; erit ratio A C ad A B compoſita ex rationibus E F ad E B, & D C ad D F: quoniam verò E F ad F B eſt vt 2 ad 1, componendo autem, indè per conuerſionem rationis, & conuertendo, E F ad E B eſt vt 2 ad 3, fuitque etiam C F ad F D, vt 3 ad 2, & componendo C D ad F D, vt 5 ad 2; erit recta A C ad A B compoſita ex rationibus 2 ad 3, & 5 ad 2, ſeu ex his, 2 ad 3, & 3 ad $1\frac{1}{2}$; hoc eſt eadem A C ad A B, vt 2 ad $1\frac{2}{3}$, ſeu vt 10 ad 6; quare diuidendo erit C B ad B A, vt 4 ad 6, ſeu vt 2 ad 3. Eadem ratione, quia pondus D ad E, componitur ex rationibus ponderum D ad F, & F ad E, rectarum vid. C F ad C D, atque E B ad B F; idem pondus D ad E, hoc eſt A E ad D A componetur ex rationibus 3 ad 5, & 3 ad 1: ex his verò rationibus componitur illa 3 ad $1\frac{2}{3}$, hoc eſt 9 ad 5; ergo A E ad D A eſt vt 9 ad 5, ſed diuidendo E D ad D A erit vt 4 ad 5, eſt ergo C B ad B A, vt 2 ad 3, & E D ad D A, vt 4 ad 5, quod erat faciendum.

II. ſint datæ duæ rationes E F ad F B, vt 4 ad 5, E D ad D A, vt 7 ad 9, debemus veſtigare reliquas rationes C F ad F D, & C B ad B A.

Ratio rectæ A C ad C B, ponderis videlicet B ad A componitur ex rationibus ponderum B ad E, & E ad A, rectarum videlicet E F ad F B, & A D ad D E, hoc eſt ex rationibus 4 ad 5, & 9 ad 7; quare A C ad C B componitur ex rationibus 4 ad 5, & 9 ad 7: hæc autem compoſita ratio eſt ea quam habet 4 ad $3\frac{8}{9}$, ſiue 36 ad 35, ergo A C ad C B eſt vt 36 ad 35, & diuidendo A B ad B C, vt 1 ad 35.

Similiter, quia C D ad C F, hoc eſt pondus F ad D componitur ex rationibus ponderum F ad E, & E ad D, rectarum videlicet E B ad B F, & D A ad A E, ex rationibus nempè 9 ad 5, & 9 ad 16; hæc autem ratio eadem eſt, ac illa, quam habet 9 ad $8\frac{8}{9}$, ſeu vt 81 ad 80, erit diuidendo D F ad F C, vt 1 ad 80.

III. quòd ſi datis duabus rationibus C F ad F D, vt 4 ad 5, & C B ad B A, vt 7 ad 9; dabimus etiam eo pacto, quo ſupra A D

ad

ad DE, vt 1 ad 35; & BF ad FE, vt 1 ad 80.

IV. Sit ratio ED ad DA, vt 20 ad 21, & CB ad BA, vt 99 ad 25, & oporteat notificare duas rationes EF ad FB, & CF ad FD. Componitur ratio rectæ CF ad FD, ponderis nempe D ad C, ex rationibus ponderum D ad A, & A ad C, hoc est rectarum EA ad ED, & CB ad BA, videlicet ex rationibus 41 ad 20, & 99 ad 25: sed 41 ad $\frac{5}{99}$ componitur ex eisdem rationibus; ergo CF ad DF est vt 41 ad $5\frac{5}{99}$, hoc est vt 4059 ad 500.

Eadem ratione quia EF ad FB, hoc est pondus B ad E componitur ex rationibus ponderum B ad A, & A ad E, linearum videlicet CA ad CB, & ED ad DA, nempe ex rationibus 124 ad 99, & 20 ad 21; cumque ex eisdem rationibus componatur ratio, quam habet 124 ad $103\frac{19}{20}$, hoc est vt 2480 ad 2079, erit in eadem ratione EF ad FB.

V. Dentur duæ proportiones ED ad DA, vt 2 ad 1, & CF ad FD ęqualitatis, oportet reliquas duas inuestigare, videlicet CB ad BA, & EF ad FB. Componitur CB ad BA, pondus nimirum A ad C ex rationibus ponderum A ad D ad C, rectarum videlicet ED ad EA, & CF ad FD; hoc est ex rationibus 2 ad 3, & 3 ad 3, est igitur CB ad BA, vt 2 ad 3.

Similiter EB ad FB, hoc est ratio ponderis F ad E componitur ex rationibus ponderum F ad D ad E, rectarum videlicet CD ad CF, & AE ad AD, hoc est ex rationibus 2 ad 1, & 3 ad 1; sed ex eisdem rationibus componitur 2 ad $\frac{1}{3}$, seu 6 ad 1, ergo EB ad BF est vt 6 ad 1, & diuidendo EF ad FB, vt 5 ad 1.

VI., & vltimo. Quòd si datæ proportiones fuerint CB ad BA, vt 2 ad 1, & EF ad FB æqualitatis ostendemus (vt supra factum est) ED ad DA, vt 2 ad 3, & CF ad FD, vt 5 ad 1.

SCHOLIVM.

Quoties autem problema fuerit impossibile ex ipsa operatione dignoscetur; si enim data fuerit ratio DF ad FC æqualitatis, & similiter BF ad FE æqualitatis, dico esse impossibilem quæstionem. Cum enim pondus C ad B, hoc est recta AB ad AC componatur ex rationibus ponderum C ad F, & F ad B, rectarum videlicet DF ad DC, & EB ad EF, hoc est rationum 1 ad 2, & 2 ad 1 erit pars AB ad totum AC, vt 1 ad 1 pars æqualis toti, quod est absurdum. Hoc aut non dissimile absurdum semper se-

quitur quoties quæstio proposita est impossibilis.

Huius propositionis primam partem, seu casum primum, cuius titulum transmiseram amico meo, nulla adiecta, aut indicata solutione, demonstrauit geometricè nobilis adolescens multitudine linguarum, artium, & scientiarum varietate conspicuus Petrus Paulus Carauaggius Petri Pauli filius præceptoris sui. Eius demonstrationem appono, quæ methodum hanc staticam geometrica in luce collocabit.

Sit E F ad F B, vt 2 ad 1, & C F ad F D, vt 3 ad 2; dico E D ad D A esse vt 4 ad 5, & C B ad B A, vt 2 ad 3.

tab. 1. fig. 9. 10

DVcatur G H paralella E C. Quoniam E C ad G F, est vt C D ad D F, videlicet vt 5 ad 2, & E C ad F H, vt 15 ad 5, erit E C ad G H, vt 15 ad 11; pariterque A E ad A G, & A C ad A H, vt 15 ad 11; igitur quarum partium A E est 15, erit G E 4, similiterque quarum partium A C est 15, erit H C 4; cum itaque sit G E ad E D, vt C F ad C D, videlicet vt 3 ad 5; si vt 3 ad 5 ita fiat 4 ad alium numerum, prodibit numerus $\frac{20}{3}$ pro E D, cuius residuum ex E A 15 erit $\frac{25}{3}$; erit igitur E D ad D A, vt 4 ad 5.

Similiter quoniam, quarum partium A C est 15, C H est 4, estque C H ad C B, vt 2 ad 3; erit C B 6, & B A 9: quare C B ad B A erit vt 2 ad 3.

PROP. VII. THEOR, I.

Recta D B secet vtcumque triangulum E A C, itaut fiat triangulum D A B, & iungantur B E, D C se inuicem secantes in F; dico D F ad F C eam habere rationem, quam habet pyramis, cuius basis triangulum A B D, & altitudo E F ad pyramidem, cuius basis triangulum A E C, & altitudo F B.

tab. 1. fig. 12

QVoniam ratio ponderis C ad D, rectæ videlicet D F ad F C componitur ex rationibus ponderum C ad B ad E ad D, rectarum videlicet A B ad A C, E F ad F B, & A D ad A E: ex ijsdem verò rationibus componitur ratio parallelepipedi contenti rectangulo A B in E F, tanquam basi, & altitudine D A, ad parallelepipedum contentum rectangulo A C in F B, tanquam basi, altitudine verò A E; ergo D F ad F C est vt parallelepipedum

factum

factum ex rectangulo AB in EF, altitudine DA, ad parallelepipedum ex AC in FB rectangulo, & altitudine AE, seu vt parallelepipedum contentum rectangulo DAB, altitudine EF, ad parallelepipedum contentum rectangulo CAE, & altitudine FB: componitur autem ratio horum duorum parallelepipedorum ex ratione, quam habet rectangulum DAB basis vnius, ad rectangulum CAE basim alterius, & altitudo EF ad altitudinem FB; rectangulum verò DAB ad rectangulum CAE componitur ex rationibus rectarum AB ad AC, & DA ad AE, ex quibus componitur etiam triangulum DAB ad triangulum AEC, cum angulus A ad verticem communis sit; ergo DF ad FC componitur ex rationibus trianguli DAB ad triangulum EAC, & rectæ EF ad FB; hoc est DF ad FC est in ea ratione in qua est pyramis, cuius basis triangulum DAB, & altitudo EF, ad pyramidem, cuius basis triangulum AEC, & altitudo FB, quod &c. *Ex Federico Command. in 23. 6.*

COROLLARIVM.

Hinc constat, si EF fuerit æqualis ipsi FB, esse triangulum DAB ad triangulum AEC, vt est recta DF ad FC. Cum enim rectæ EF, FB sint æquales altitudines prædictarum pyramidum, erunt iccircò inter se vt bases.

LEMMA IV.

Si aliqua proportio fuerit composita ex pluribus deinceps rationibus, inde perturbato antecedentium, vel consequentium ordine, siue etiam vtroque, vt fiant totidem aliæ rationes, component istæ eandem priorem rationem.

A C E G ✠ K M ⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂ O
B D F H I L N ⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂ P

A ✠ K E C G M ⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂ Q
N D H L F I B ⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂ R

Sint quotlibet rationes, puta septem expositæ A ad B, C ad D, E ad F, G ad H, ✠ ad I, K ad L, & M ad N: ratio verò ex ipsis composita sit O ad P. Perturbato iam ordine antecedentium

ACEG ✠ KM inter ſe quomodocunque, vt ſit A ✠ KECGM; vel ordine conſequentium BDFHILN; vt ſit NDHLFIB. Dico ſi ex rationibus A ad N, ✠ ad D, K ad H, E ad L, C ad F, G ad I, & M ad B fiat ratio Q ad R, hanc ſimilem eſſe priori O ad P.

Ex Clau. ad prop. 19. 8. Nam ex multiplicatione laterum ACEG ✠ KM, vel ipſorum A ✠ KECGM fit ſemper idem productum; pariterque idem quod oritur ex ductu laterum BDFHILN, fit etiam ex multiplicatione laterum NDHLFIB; Ratio ergo producti priorum antecedentium ad productum priorum conſequentium erit eadem penitus ac illa producti poſtremarum, ſeù perturbatarum antecedentium, ad productum poſtremarum conſequentium; ſed vt O ad P, ita productum ex antecedentibus prioris ordinis ad productum primi ordinis conſequentium; itemque vt Q ad R ita productum ex ſecundi ordinis antecedentibus ad productum eiuſdem ordinis conſequentium; ergo ſi duæ illæ rationes productorum (vt oſtendimus) ſunt inter ſe ſimiles, neceſſe eſt vt quoque ſimiles ſint duæ rationes O ad P, & Q ad R, quod erat &c.

PROP. VIII. THEOR. II.

Poſita eadem figura propoſitionis ſeptimæ huius. Dico triangulum EAC ad triangulum DAB, eſſe vt triangulum EFC ad triangulum DFB.

tab. 1. fig. 10. RAtio trianguli EAC ad triangulum DAB componitur ex rationibus laterum communem angulum EAC comprehendentiū, nimirū ex proportionibus EA ad AD, & CA ad AB;
23. 6. ſed ex vi primi elementi noſtri recta EA ad AD, pondus videlicet D ad E componitur ex rationibus ponderum D ad F ad E, ſeu ex rationibus rectarum CF ad CD, & EB ad BF; Itemque CA ad AB, hoc eſt pondus B ad C componitur ex proportionibus ponderum B ad F ad C, rectarum ſcilicet FE ad EB, & CD ad DF; ergo triangulum EAC ad triangulum DAB componitur ex rationibus rectarum CF ad CD, EB ad BF, FE ad EB, & CD ad DF, vel ex ijſdem, ordine ipſarum proportionum perturbato, hoc eſt ex rationibus rectarum CF ad CD, CD ad DF, FE ad EB, & EB ad BF: duæ verò priores componunt illam ex CF ad DF, & duæ poſtremæ componunt rationem ex FE ad BF; ergo

trian-

triangulum EAC ad ipsum DAB componitur ex rationibus rectarum CF ad FD, & FE ad BF; sed ex eisdem circa æquales angulos ad verticem F componitur etiam triangulum EFC ad ipsum DFB; ergo vt triangulum EAC ad ipsum DAB, ita triangulum EFC ad ipsum DFB. 23. 6.

PROP. IX. PROB. VII.

Exposita secundi elementi figura, intellectisque ponderibus eodem modo suspensis; datis duabus quibuscunque rationibus ex sex ED ad DA; AB ad BC; CK ad KE; KF ad FA; DF ad FC; & EF ad FB oporteat quatuor reliquas indagare.

HVius problematis sunt quindecim casus; nàm ducto 6 in 5 fit productum 30, cuius semissis est 15, numerus videlicet binariorum ex sex deriuantium. *tab. 1. fig. 5.*

Sint igitur primum datæ duæ rationes ED ad DA, vt 6 ad 7; & AB ad BC, vt 8 ad 9; quas verò debemus manifestare sint EF ad ad FB; DF ad FC; KF ad FA; EK ad KC.

Iam in figura EACF cùm datæ sint duæ rationes ED ad DA, & AB ad BC, notæ erunt reliquæ duæ, videlicet DF ad FC, vt 16 ad 39, & EF ad FB, vt 34 ad 21: deinde quia in figura ACEF primi elementi dantur duæ rationes EF ad FB, vt 34 ad 21, & AB ad BC, vt 8 ad 9, dabuntur quoque duæ reliquæ rationes AF ad FK, vt 37 ad 18, & EK ad KC, vt 16 ad 21.

II. Quod si datæ rationes fuissent AB ad BC, vt 6 ad 7, & CK ad KE, vt 8 ad 9, darentur similiter quatuor rationes BF ad FE, vt 16 ad 39; AF ad FK, vt 34 ad 21; CF ad FD, vt 37 ad 18; AD ad DE, vt 16 ad 21.

III. Si verò essent duæ datæ rationes CK ad KE, vt 6 ad 7, & ED ad DA, vt 8 ad 9, eodem modo notas reddemus quatuor rationes KF ad FA, vt 16 ad 39; CF ad FD, vt 34 ad 21; EF ad FB, vt 37 ad 18; & CB ad BA, vt 16 ad 21.

IV. Sint datæ duæ rationes AF ad FK, vt 21 ad 13; & EK ad KC, vt 10 ad 11, debemus quatuor reliquas inuenire, nempè ED ad DA; AB ad BC; EF ad FB, & CF ad FD. Quoniam in primo elemento, cuius vertex C centrum F sunt datæ duæ rationes AF ad FK, vt 21 ad 13; EK ad KC, vt 10 ad 11; dabuntur duæ reli-

quæ E F ad F B, vt 23 ad 11, & A B ad B C, vt 10 ad 13; & quia rursus in primo elemento, cuius vertex E, idemque centrum F sunt datæ duæ rationes A F ad F K, vt 21 ad 13, & E K ad K C, vt 10 ad 11, reliquas item duas notificabimus; eritque E D ad D A, vt 13 ad 11, & C F ad F D, vt 24 ad 10.

V. Si verò datæ fuerint rationes duæ C F ad F D, vt 21 ad 13, & A D ad D E, vt 10 ad 11, erunt pariter notæ quatuor rationes A F ad F K, vt 23 ad 11; C K ad K E, vt 10 ad 13; A B ad B C, vt 13 ad 11, & E F ad F B, vt 24 ad 10.

VI. Et si datæ duæ rationes fuissent E F ad F B, vt 21 ad 13, & C B ad B A, vt 10 ad 11; eodem prorsus modo haberentur reliquæ quatuor rationes; hoc est C K ad K E, vt 13 ad 11; A F ad F K, vt 24 ad 10; C F ad F D, vt 23 ad 11, & A B ad B C, vt 10 ad 13.

VII. Habitis duabus rationibus E F ad F B æqualitatis, C F ad F D, vt 52 ad 18; & reliquas quatuor reperiemus. Est enim in elemento primo, cuius vertex A centrum F data vtraque ratio E F ad F B, & C F ad F D, quare duas reliquas non ignorabimus, videlicet C B ad B A, vt 17 ad 18, & A D ad D E, vt 35 ad 17. Sunt itaque datæ duæ rationes E F ad F B æqualitatis, & A B ad B C, vt 18 ad 17; propterea in primo elemento, cuius vertex C, & centrum F dabuntur etiam duæ reliquæ E K ad K C, vt 18 ad 35, & K F ad F A, vt 17 ad 53.

VIII. Et si datæ rationes fuissent E F ad F B æqualitatis, A F ad F K, vt 52 ad 18; cognoscemus eadem ratione E K ad K C, vt 17 ad 18; C B ad B A, vt 35 ad 17; A D ad D E, vt 18 ad 35; & D F ad F C, vt 17 ad 53.

IX. At si duæ cognitæ rationes fuerint C F ad F D, vt 1 ad 1, A F ad F K, vt 52 ad 18; non latebunt quatuor reliquæ, eritque A D ad D E, vt 17 ad 18; E K ad K C, vt 35 ad 17; C B ad B A, vt 18 ad 35; & B F ad F E, vt 17 ad 53.

X. Sint datæ duæ rationes E D ad D A, vt 39 ad 105; B F ad F E, vt 105 ad 69, cognoscemus etiam quatuor reliquas; nam in elemento primo, cuius vertex A, centrum F, dantur duæ expositæ rationes, ergo & duæ reliquæ palam fient, hoc est C F ad F D, vt 144 ad 30, & C B ad B A, vt 39 ad 30; Sed cum rursus in alio elemento primo, cuius vertex C, idemque centrum F sint notæ duæ rationes B F ad F E, vt 105 ad 69; & C B ad B A, vt 39 ad 30;

da-

dabuntur item residuæ rationes AF ad FK, vt 135 ad 39, & EK ad KC, vt 30 ad 105.

Reliqui verò quinque casus similes omninò sunt huic supradicto decimo, licet diuersa videatur positio, atque adeo eodem modo soluuntur, quod erat &c.

PROP. X. PROB. VIII.

Exposita eadem secundi elementi figura, datisque rationibus DA ad AB, & DE ad BC oporteat rationem CK ad KE manifestare.

SIT ratio DA ad AB, vt 2 ad 3, & DE ad BC, vt 5 ad 4; quia proportio CK ad KE, ponderis videlicet E ad C componitur ex rationibus ponderum E ad A ad C, rectarum videlicet AD ad DE, & CB ad BA; ex his autē rationibus componitur etiam rectangulum ex AD in CB, ad rectangulum ex DE in BA; quæ quidem rectangula componuntur etiam ex duabus rationibus DA ad BA, & CB ad DE, hoc est ex duabus 2 ad 3, & 4 ad 5; erit DA ad AB, vt 8 ad 15, nempè vt productum ex DA in CB ad productum ex BA in DE, quod erat &c. *tab. 1. fig. 5.*

Idem geometricè ex prædicto Petro Paulo Carauaggio Iuniore.

Quarum partium ED est 2, sit CB 5; & quarum DA est 1, sit AB 3. Dico CK ad KE eandem rationem habere, quam habet rectangulum ex AD in CB ad rectangulum ex ED in EB, videlicet vt 5 ad 6.

QVoniam enim vt AD ad DE, ita triangulum ACD ad triangulum DCE, vt autem AD ad DE, ita est triangulum AFD ad triangulum DFE; ergo vt AD ad DE, ita erit triangulum ACF ad triangulum FCE. Similiter erit vt CB ad BA, ita triangulum EFC ad triangulum EFA; habet igitur triangulum AFC ad triangulum AFE rationem compositam ex AD ad DE, & CB ad BA; sed vt triangulum AFC ad triangulum AFE, ita CK ad KE; igitur CK ad KE habet rationem compo- *19. 5.*

sitam

sitam ex AD ad DE, & CB ad BA; Sed ex ijsdem rationibus componitur ratio, quam habet rectangulum ex AD in BC ad rectangulum ex DE in BA; ergo vt rectangulum ex AD in BC ad rectangulum ex DE in BA, ita CK ad KE, quod erat &c.

Idem ego geometricè præstiti nondum tradita mihi solutione Carauaggij, sequenti lemmate præmisso.

LEMMA V.

Sit triangulum ABD, in quo se inuicem secent lineæ DGI, BGH, AGC in G; ex puncto autem A ducta FE parallela BD occurrat in punctis FE lineis CIF, & CHE; dico rectam FA esse æqualem AE.

tab. 2. PRoducantur BH, DI, donec occurrant in KL rectæ LK.
fig. 13. Quoniam DC ad LA est vt CG ad GA, vt autem CG ad
2. 6. 11. 5. GA, ita BC ad AK, erit vt DC ad LA, ita BC ad AK, & permutando DC ad CB, vt LA ad AK. Rursus, quia CD ad AE est vt CH ad HE; vt autem CH ad HE, ita BC ad EK, erit CD ad AE, vt BC ad EK; & permutando CD ad CB, erit vt AE ad EK: deniq; quoniam similiter CD ad CB est vt LF ad FA, erunt
11. 5. tres rationes LA ad AK, AE ad EK, LF ad FA similes eidem CD ad CB, & propterea etiam inter se; cum itaque sit vt LF ad FA, ita AE ad EK, & componendo vt LA ad AF, ita AK ad EK, erit permutando vt LA ad AK, ita AF ad EK; sed vt LA ad AK, ita
11. 5. est quoque AE ad EK; ergo vt est AF ad EK, ita AE ad eandem
9. 5. EK; ergo FA, AE sunt æquales, quod &c.

Detur triangulum AHE, seque in illo inuicem secent in I lineæ EK, FA, HD; datis deinde rationibus AK ad AD, & KH ad DE in numeris oporteat inuestigare rationẽ EF ad FH.

tab. 2. DVcatur à puncto A recta BC parallela HE; à puncto verò
fig. 14. F per KD ductæ rectæ FB, FC secent BC in punctis B C, ducatur denique ex A recta AG parallela CF occurrens productæ EH in G.

34. 1. Quoniam GA est parallela FC, & AC parallela GF, erit AF
ex lem. 5. parallelogrammum, eritque GF æqualis AC, hoc est AB; cùm

itaque

itaque ratio EF ad FH componatur ex duabus rationibus EF ad FG, & FG ad FH, sitque vt EF ad FG, ita ED ad DA, vtque FG, hoc est AB ad FH, ita AK ad KH, erit ratio EF ad FH composita ex duabus rationibus ED ad DA, & AK ad KH; sed ex 22. 5.
iisdem componitur ratio rectanguli ex AK in DE ad rectangulum ex KH in AD, seu ex his duabus alijs KA ad AD, & DE ad HK; igitur etiam EF ad FH componitur ex iisdem rationibus KA ad AD, & DE ad KH, quæ cum datæ sint, ratio EF ad FH manifesta erit, quod &c.

PROP. XI. THEOR. III.

Exposita rursus figura secundi elementi EDABCKF; dico AE ad AC componi ex rationibus triangulorum CFB ad DFE; & rectangulorum DEK ad BCK.

Componitur ratio EA ad AC ex rationibus AE ad AD ad AB ad AC; similiterq; ratio AE ad AD, ponderis nempè D ad E componitur ex rationibus ponderum D ad C ad E, rectarum videlicet CF ad FD, & EK ad KC, pariterque AB ad AC, hoc est pondus C ad B componitur ex rationibus ponderum C ad E ad B, rectarum videlicet EK ad KC, & BF ad FE; ergo AE ad AC componitur ex rationibus CF ad FD, EK ad KC, AD ad AB, EK ad KC, & BF ad FE. Similiter AD ad AB componitur ex rationibus AD ad DE ad BC ad BA, seù ex iisdem ordine perturbato, hoc est ex rationibus AD ad DE, CB ad BA, & ED ad CB; & ratio CK ad KE est illa, quæ componitur ex rationibus AD ad DE, & CB ad BA; quare AD ad AB constituetur ex rationibus CK ad KE, & ED ad CB; componitur igitur ratio AE ad AC ex rationibus CF ad FD, EK ad KC, CK ad KE, ED ad CB, EK ad KC, BF ad FE, quarum duæ EK ad KC, & KC ad KE constituunt vnicam KE ad KE æqualitatis, quæ cum non augeat, neque minuat rationum compositionem, necesse est vt AE ad AC componatur ex quatuor rationibus CF ad FD, ED ad CB, EK ad KC, & BF ad FE, vel ex iisdem perturbato earundem ordine, videlicet ex CF ad FD, BF ad FE, ED ad CB, & EK ad KC; sunt autem duæ priores rationes CF ad FD, BF ad FE illæ, quæ componunt rationem, quam habet triangulum CFB ad

tab. 1. fig. 5.

DFE, cum duo anguli ad verticem F æquales sint; duæ verò postremæ ED ad CB, & EK ad KC componunt rectangulum DEK ad rectangulum BCK; ergo AE ad AC componitur ex rationibus trianguli CFB ad triangulum DFE, & rectanguli DEK ad rectangulum BCK, quod &c.

PROP. XII. PROB. IX.

Exposita tertij elementi figura, ex quinque verò rationibus, de quibus in ipso egimus elemento, datis tribus quibuscunque oportet reliquas duas manifestare.

HVius problematis sunt decem casus; nàm numerus quinque resoluitur in decem numeros binarios; ducto siquidem 5 in 4 fit 20, cuius medietas est 10.

tab. 2. fig. 15. Sint primùm datæ tres rationes AF ad FE, vt 3 ad 4, BG ad GE æqualitatis, & CD ad DE, vt 5 ad 4, debemus reliquas duas inuestigare, hoc est FG ad GD, & AB ad BC; & quia in hoc casu tantùm non debet AC esse parallela FD, ducamus à puncto A parallelam AHI.

Quoniam BG ad GH componitur ex rationibus BG ad GE, & GE ad GH; estque GE ad GH, vt EF ad FA; erit BG ad GH composita ex rationibus BG ad GE, & EF ad FA, videlicet ex rationibus 4 ad 4, & 4 ad 3; & ideò BG ad GH erit vt 4 ad 3; & diuidendo, BH ad HG, vt 1 ad 3; sed HG ad HE est vt 3 ad 7; ergo ex æquali BH ad HE erit vt 1 ad 7. Rursus CD ad DI componitur ex proportionibus CD ad DE ad DI; sed ED ad DI est vt EF ad FA; ergo CD ad DI composita est ex rationibus CD ad DE, & EF ad FA, imò ex rationibus 5 ad 4, & 4 ad 3; quare CD ad DI est vt 5 ad 3; & diuidendo, CI ad ID, vt 2 ad 3; ID verò ad IE, hoc est AF ad FE, vt 3 ad 7; igitur ex æquali, vt CI ad IE, ita 2 ad 7; cum igitur in figura primi elementi, cuius vertex C, & centrum H, datæ sint duæ rationes CI ad IE, vt 2 ad 7, & BH ad HE, vt 1 ad 7; etiam duæ reliquæ palàm fient, hoc est IH ad HA, vt 7 ad 9, & CB ad BA æqualitatis; vt verò IH ad HA, ita DG ad GF; ergo dedimus reliquas duas rationes FG ad GD, vt 9 ad 7, & CB ad BA, vt 1 ad 1, videlicet æqualitatis.

II.

II. In inferiori figura eiusdem tertij elementi dentur tres rationes C D ad D E, vt 7 ad 4; C B ad B A, vt 2 ad 4; & D G ad G F, vt 5 ad 11, oportet reliquas duas rationes A F ad F E, & E G ad G B aperire.

Componitur proportio E A ad E F, ponderis nempè F ad A ex proportionibus ponderum F ad D ad C ad A; rectarum videlicet D G ad G F; E C ad E D; & A B ad B C; ex rationibus nimirum 5 ad 11 ad 4 ad 2; quare E A ad E F est vt 5 ad 2, diuidendoque, erit A F ad F E, vt 3 ad 2.

Rursus E B ad E G, hoc est pondus G ad B componitur ex proportionibus ponderum G ad D ad C ad B, rectarum videlicet D F ad F G, E C ad E D, & A B ad A C; imò ex rationibus 16 ad 11 ad 4 ad 6; itaque E B ad E G est vt 16 ad 6, & diuidendo B G ad G E, erit vt 10 ad 6.

III. Quòd si datæ tres rationes fuerint A F ad F E, vt 7 ad 4, A B ad B C, vt 2 ad 4, & F G ad G D, vt 5 ad 11, eodem prorsus modo ostendemus C D ad D E, vt 3 ad 2, & B G ad G E, vt 5 ad 3.

IV. Dentur tres rationes B G ad G E, vt 8 ad 15; C D ad D E, vt 5 ad 7; & F G ad G D, vt 12 ad 11; debemus reliquas duas patefacere, hoc est A F ad F E, & A B ad B C. *tab. I. fig. 6.*

Recta A C ad A B, pondus videlicet B ad C, componitur ex rationibus ponderum B ad G ad D ad C, rectarum scilicet E G ad E B, F D ad F G, & C E ad E D; imò ex rationibus 15 ad 23 ad 12 ad 7; ergo A C ad A B est vt 15 ad 7, diuidendo verò est C B ad B A, vt 8 ad 7. Iam datis tribus proportionibus E D ad D C, vt 7 ad 5; F G ad G D, vt 12 ad 11; & C B ad B A, vt 8 ad 7; eo modo quo vsi sumus in prima parte secundi casus huius problematis, deprehendemus A F ad F E esse vt 3 ad 8.

V. Si verò cognitæ rationes erunt B G ad G E, vt 8 ad 15; A F ad F E, vt 5 ad 7; & D G ad G F, vt 12 ad 11; ostendemus similiter A B ad B C esse vt 8 ad 7; & C D ad D E, vt 3 ad 8.

VI. Habitis tribus rationibus E G ad G B æqualitatis, F G ad G D, vt 7 ad 3; & A B ad B C, vt 3 ad 2, debemus reperire reliquas duas A F ad F E, & C D ad D E. Componitur E C ad E D, pondus videlicet D ad C ex rationibus ponderum D ad G ad B ad C, imò ex rationibus 7 ad 10 ad 5 ad 3; ergo E C ad E D, est vt 7 ad 3, at diuidendo C D ad D E, vt 4 ad 3; itaque datis tribus rationibus B G ad G E æqualitatis; C D ad D E, vt 4 ad 3; & F G ad G D, vt

7 ad 3; dabitur etiam ex prima parte secundi casus ratio A F ad F E, eritque vt 1 ad 2.

VII. Sint datæ tres rationes A F ad F E, vt 1 ad 6; E D ad D C, vt 5 ad 4; & A B ad B C, vt 5 ad 6; debemus duas reliquas notificare, nempe F G ad G D, & E G ad G B. Componitur F G ad G D, pondus nempe D ad F ex rationibus grauium D ad C ad A ad F, rectarum videlicet E C ad E D; A B ad B C; & E F ad E A; hoc est ex rationibus 9 ad 5 ad 6 ad 7, quare F G ad G D est vt 9 ad 7.

Deindè E B ad E G, hoc est pondus G ad B componitur ex rationibus grauium G ad D ad C ad B, rectarum nimirùm F D ad F G, E C ad E D, & A B ad A C; imò ex rationibus 16 ad 9 ad 5 ad 11; ergo E B ad E G est, vt 16 ad 11; diuidendo autem, erit B G ad G E, vt 5 ad 11.

VIII. Habitis tribus rationibus A F ad F E, rursus vt 1 ad 6, F G ad G D, vt 9 ad 7; E D ad D C, vt 5 ad 4; oportet reliquas inuestigare, duas scilicet A B ad B C, & E G ad G B. Componitur A B ad B C, hoc est graue C ad A ex rationibus grauium C ad D ad F ad A, rectarum nempe E D ad E C; F G ad G D; & E A ad F E; imò ex rationibus 5 ad 9 ad 7 ad 6; ergo A B ad B C est, vt 5 ad 6. Deinde quoniam pondus F-A ad pondus D-C componitur ex rationibus ponderum F-A ad F ad D ad D-C; rectarum scilicet A F ad A E, D G ad G F, & C E ad D C; imò ex rationibus 1 ad 7 ad 9 ad 4; erit F-A ad D-C, vt 1 ad 4; & componendo E ad D-C erit vt 5 ad 4; & quia D-C ad G componitur ex rationibus grauium D-C ad D ad G, hoc est rectarum D C ad C E, & F G ad F D; imò ex rationibus 4 ad 9 ad 16; erit D-C ad G, vt 4 ad 16; sed prius E ad D-C fuit, vt 5 ad 4; ergo ex æquali E ad G, hoc est B G ad B E erit, vt 5 ad 16; conuertendo autem, indeque diuidendo, erit E G ad G B, vt 11 ad 5, quod &c.

IX. Proponantur tres rationes C D ad D E, vt 4 ad 5; E G ad G B, vt 11 ad 5; & A B ad B C, vt 5 ad 6; oporteatque indagare reliquas duas. Componitur A F ad F E, pondus videlicet F-A ad A ex rationibus grauium F-A ad E ad B ad A, & quia E ad D-C constituitur ex rationibus grauium E ad B ad C ad D-C, rectarum scilicet B G ad G E; A C ad A B; & E D ad D C; imò ex rationibus numerorum 5 ad 11 ad 5 ad 4; erit pondus E ad D-C, vt 5 ad 4; sed per conuersionem rationis, indèque

con-

conuertendo, erit F-A ad E, vt 1 ad 5; sed rationes ponderum E ad B ad A, rectarum nimirum B G ad G E, & A C ad B C sunt deinceps vt 5 ad 11 ad 6; ergo ex æquali A F ad F E erit vt 1 ad 6.

Similiter, quia F D ad G F, hoc est graue G ad D, componitur ex rationibus grauium G ad B ad C ad D, rectarum videlicet E B ad E G; A C ad A B; E D ad E C; seu ex rationibus 16 ad 11 ad 5 ad 9; erit FD ad GF, vt 16 ad 9; at diuidendo erit D G ad G F, vt 7 ad 9.

X. Quod si denique dentur tres rationes A F ad F E, vt 4 ad 5; E G ad G B, vt 11 ad 5; & C B ad B A, vt 5 ad 6; eodem ratiocinio manifestabimus C D ad D E, vt 1 ad 6; & F G ad G D, vt 7 ad 9, quæ &c.

PROP. XIII. THEOR. IV.

Exposita eiusdem tertij elementi figura iungantur insuper duæ lineæ A D, F C. Dico G D ad G F esse vt est pyramis, cuius basis triangulum E A D, & altitudo B C ad pyramidem, cuius basis triangulum C E F, atq; altitudo A B.

QVoniam D G ad G F, pondus nimirum F ad D componitur ex rationibus F ad A ad C ad D, rectarum scilicet A E ad E F; C B ad B A; E D ad E C, vel ex ijsdem perturbatè, hoc est ex rationibus A E ad E F; E D ad E C; & C B ad B A; ex prioribus autem duabus componitur triangulum A E D ad triangulum C F E (quòd angulus ad E communis sit) erit D G ad G F composita ex rationibus trianguli A E D ad E F C, & rectæ C B ad B A; hoc est D G ad G F est, vt pyramis, cuius basis triangulum A E D, altitudoque B C, ad pyramidem, cuius basis triangulum E F C, & altitudo A B, quod est &c. *tab. 2. fig. 16.*

COROLLARIVM.

Constat, si C B fuerit æqualis ipsi A B, esse G D ad G F, vt triangulum E A D ad triangulum C F E.

PROP. XIV. THEOR. V.

Iisdem manentibus dico C B ad B A eße, vt est pyramis, cuius basis triangulum F E C, & altitudo G D ad pyramidem, cuius basis triangulum A E D, altitudo verò G F.

Recta C B ad B A, pondus videlicet A ad C, componitur ex rationibus ponderum A ad F ad D ad C, rectarum videlicet E F ad E A, G D ad G F, & E C ad E D, seu ex iisdem perturbatè sumptis, hoc est ex rationibus E F ad E A, E C ad E D, & G D ad G F; sed ex prioribus duabus componitur ratio trianguli F E C ad triangulum D E A, vt diximus in antecedenti theoremate; ergo C B ad B A componitur ex rationibus trianguli F E C ad triangulum D E A, & rectæ G D ad G F; hoc est C B ad B A est vt pyramis, cuius basis triangulum F E C, & altitudo G D ad pyramidem, cuius basis triangulum D E A, & altitudo G F.

COROLLARIVM.

Manifestum est, quod, si G D fuerit æqualis ipsi G F, habebit C B ad B A eandem rationem, quam habet triangulum C E F ad triangulum A E D.

PROP. XV. THEOR. VI.

Exposita figura tertij elementi ducantur insuper duæ lineæ A G, B F, ostendendum est G D ad D F esse, vt est pyramis, cuius basis triangulum A E G, & altitudo B C ad pyramidem, cuius est basis triangulum F E B, & altitudo A C.

tab. 2. fig. 17. Qvoniam D G ad F D, pondus nimirum F ad G componitur ex rationibus grauium F ad A ad B ad G, rectarũ videlicet A E ad E F, C B ad C A, & E G ad E B; ex his verò rationibus perturbatè sumptis, videlicet A E ad E F, E G ad E B, & C B ad C A, componitur quoq; ratio pyramidis, cuius basis triangulum A E G, & altitudo C B ad pyramidem, cuius basis triangulum F E B, & altitudo C A; erit D G ad F D, vt dicta pyramis altitudinis C B ad aliam pyramidem altitudinis C A, quod erat &c.

PROP.

PROP. XVI. THEOR. VII.

Iisdem positis dico B C ad C A esse, vt est pyramis, cuius basis triangulum F E B, altitudo G D ad pyramidem, cuius basis triangulum E A G, & altitudo F D.

COmponitur ratio CB ad C A, ponderis videlicet A ad B, ex rationibus ponderum A ad F ad G ad B, rectarum videlicet EF ad E A, D G ad D F, & E B ad E G, & ex iisdem etiam perturbatè sumptis, hoc est ex E F ad E A, E B ad E G, & D G ad D F; triangulum autem F E B ad triangulum A E G componitur ex rationibus FE ad E A, & E B ad E G (cum angulus A E B communis sit) ergo B C ad C A erit vt pyramis, cuius basis triangulum FEB, altitudo G D, ad pyramidem, cuius basis triangulum A E G, & altitudo D F, quod erat &c.

PROP. XVII. PROB. X.

Exposita quarti elementi figura, ex quinque verò rationibus de quibus in eodem elemento egimus, habitis tribus quibuscunque institutum est reliquas duas inuestigare.

HAbet hoc problema decem casus, veluti antecedens. *tab. 2. fig. 18.*

I. Sint datæ tres rationes E D ad D C, vt 5 ad 4, G D ad D B, vt 6 ad 7, & F D ad D A, vt 1 ad 3 (in hoc tantùm primo casu non debent esse inter se parallelæ duæ rectæ A C, E F) oportet igitur duas reliquas rationes indagare, hoc est AB ad B C, & E G ad G F.

Cum igitur A C, E F parallelæ non sint, productæ conuenient, vt in H; itaque quia in figura A C H F E D primi elementi, cognitę sunt duæ rationes E D ad D C, vt 5 ad 4, A D ad D F, vt 3 ad 1; manifestabimus etiam (ex primo casu sexti problematis) duas reliquas rationes, eritque E F ad F H, vt 11 ad 16; A C verò ad A H, vt 11 ad 20. Rursus in alia figura G F H B A D eiusdem elementi habentur duæ rationes A D ad D F, vt 3 ad 1; B D ad D G, vt 7 ad 6; ergo, vt supra, dabimus reliquas duas, videlicet H F ad F G, vt 28 ad 11, & H A ad A B, vt 24 ad 11. Verùm quia C A ad A B

com-

componitur ex rationibus A C ad A H ad A B, numerorum videlicet 11 ad 20, & 24 ad 11, ex quibus componitur ratio 66 ad 55; erit C A ad A B, vt 66 ad 55, & diuidendo, C B ad B A, vt 11 ad 55, imò vt 1 ad 5. Similiter quia E F ad F G componitur ex rationibus rectarum E F ad F H ad F G, videlicet numerorum 11 ad 16, & 28 ad 11, ex quibus fit ratio 11 ad 6 2/7, immò 77 ad 44; erit diuidendo E G ad G F, vt 33 ad 44, seu vt 3 ad 4.

II. Sit dicta figura quarti elementi quomodolibet supposita, habitisque tribus rationibus A B ad B C, vt 5 ad 1, B D ad D G, vt 7 ad 6, & E G ad G F, vt 3 ad 4, oporteat reliquas duas rationes indagare, nimirum E D ad D C, & F D ad D A. Componitur recta F D ad D A, pondus nempè A ad F, ex rationibus ponderum A ad B ad G ad F, rectarum videlicet C B ad C A, G D ad D B, & E F ad E G, imò ex rationibus 1 ad 6 ad 7 ad 3; quarè F D ad D A est, vt 1 ad 3. Eadem ratione quia E D ad D C, hoc est graue C ad E componitur ex rationibus grauium C ad B ad G ad E, rectarum nempè A B ad A C, G D ad D B, & E F ad G F; imò ex rationibus 5 ad 6 ad 7 ad 4; erit E D ad D C, vt 5 ad 4.

III. Cognitis tribus rationibus A D ad D F, vt 3 ad 1, F G ad G E, vt 4 ad 3, & E D ad D C, vt 5 ad 4, si suspendamus grauia iuxta tres illas notas rationes, consequemur duas reliquas A B ad B C, vt 5 ad 1, & G D ad D B, vt 6 ad 7.

IV. Idem fiet si tres rationes fuerint E D ad D C, vt 3 ad 1; C B ad B A, vt 4 ad 3, & A D ad D F, vt 5 ad 4, reperiemus enim E G ad G F, vt 5 ad 1, & B D ad G D, vt 6 ad 7.

tab. 2. fig. 19. V. Habeantur tres rationes F G ad G E, vt 4 ad 3, E D ad D C, vt 5 ad 4, & C B ad B A, vt 1 ad 5; debemus reperire reliquas duas B D ad D G, & F D ad D A, quod (nè obliuiscamur methodi, qua vsi sumus ab initio) sic præstabimus. Fiat vt 3 ad 4, hoc est vt recta G E ad F G, ita pondus F 3 ad pondus E 4; atque vt C D ad D E, hoc est vt 4 ad 5, ita pondus E 4 ad pondus C 5; & denique vt A B ad B C, hoc est vt 5 ad 1, ita pondus C 5 ad pondus A 1. Quoniam punctum B est centrum grauitatis grauium A 1, C 5; Itemque G centrum grauitatis ponderum E 4, F 3 erit in libra G D B centrum grauitatis omnium grauium A 1, C 5, E 4, F 3; est autem D centrum grauitatis duorum grauium E 4, C 5; ergo si possibile est vt ponamus aliquod aliud punctum h, vt cen-

trum

trum grauium A 1, F 3, erit in recta D H, puta in I centrum grauitatis omnium grauium, & ideo (vt prius ostensum est) non foret in libra B D G, quia vnicum est, quod cum fieri nequeat debet idem punctum D esse centrum grauitatis omnium grauium, itemque grauium A 1, F 3, & grauium E 4, C 5; propterea vt B 6 ad G 7, ita recta G D ad D B, vtq; A 1 ad F 3, ita F D ad D A.

VI. Quod si tres cognitæ rationes sint E G ad G F, vt 4 ad 3; F D ad D A, vt 5 ad 4; & A B ad B C, vt 1 ad 5, eadem ratione cognoscemus reliquas duas G B ad D B, vt 6 ad 7; & E D ad D C, vt 1 ad 3.

VII. Habitis tribus rationibus E D ad D C, vt 1 ad 2, A B ad B C æqualitatis, & G D ad D B, vt 1 ad 3, oporteat reliquas duas inuestigare, E G scilicet ad G F, & A D ad D F. Componitur G F ad F E, pondus scilicet E ad G, ex rationibus grauium E ad C ad B ad G, rectarum videlicet C D ad C E; A B ad A C; & G D ad D B; imò ex rationibus numerorum 2 ad 1 ad 2 ad 6, quare G F ad F E est vt 2 ad 6, conuertendo autem, indeque diuidendo, erit E G ad G F, vt 2 ad 1. Rursus quia D F ad D A, pondus videlicet A ad F componitur ex rationibus grauium A ad C ad E ad F, rectarum videlicet C B ad B A; E D ad D C; & F G ad G E, seu ex rationibus 1 ad 1 ad 2 ad 4; erit D F ad F A, vt 1 ad 4. *tab. 1. fig. 7.*

Alios verò tres casus eodem modo ostendemus; etenim huic septimo sunt similes. Constat igitur totum problema.

COROLLARIVM.

Quod si angulus A D C intelligatur supra angulum E D F, linea A D in lineam E D; B D in D G, & C D in D F cadet; linea verò A B C lineas E D, G D, F D secabit, ex quo fiet, vt figura elementi quarti transeat in illam tertij, & viceuersa hæc in illam, si in pristinam positionem angulus ille restituatur; quare si in figura elementi quarti pro rationibus E D ad D C, F D ad D A, sumantur duæ E D ad D A, & F D ad D C; inde tres quælibet, vt diximus, datæ sint rationes reliquas quoque duas notificabimus; idemque præstabimus in figura tertij elementi commutatis rationibus A E ad E F, C D ad D E in rationes A E ad E D, & C E ad E F.

PROP. XVIII. THEOR. VIII.

Posita eadem elementi quarti figura ducantur insuper lineæ E A, F C, dico G F ad G E, esse vt est pyramis, cuius basis triangulum F D C, altitudo verò A B ad pyramidem, cuius basis triangulum A D E, & altitudo C B.

tab. 2. fig. 20. COmponitur proportio rectæ G F ad G E, illa nempe ponderis E ad F ex rationibus grauium E ad C ad A ad F, rectarum videlicet C D ad D E, A B ad B C, & F D ad D A, vel ex iisdem perturbatè acceptis, nempe ex C D ad D E, F D ad D A, & A B ad B C, hoc est ex rationibus trianguli F D C ad triangulum E D A, & ex recta A B ad B C; sed ex iisdem rationibus componitur pyramis, cuius basis triangulum F D C, altitudo verò A B ad pyramidem, cuius basis triangulum A D E, & altitudo B C; ergo vt prior pyramis ad hanc, ita G F ad G E, quod &c.

COROLLARIVM.

Patet, si recta A B æqualis sit rectæ B C, esse triangulum F D C ad triangulum A D E, vt recta G F ad G E.

PROP. XIX. THEOR. IX.

Exposita eadem figura quarti elementi ducamus insuper duas lineas E B, G C. Dico G F ad F E esse, vt est pyramis, cuius basis triangulum C D G, & altitudo A B, ad pyramidem, cuius basis triangulum B D E, & altitudo A C.

tab. 2. fig. 21. COmponitur ratio G F ad F E, ponderis videlicet E ad G, ex rationibus grauium E ad C ad B ad G, rectarum videlicet C D ad D E, A B ad A C, & G D ad D B; vel ex iisdem perturbatè acceptis, nempe ex rationibus C D ad D E, G D ad D B, A B ad A C, hoc est ex triangulo C D G ad triangulum E D B; & ex recta A B ad A C; ex his verò rationibus componitur ratio pyramidis, cuius basis triangulum C D G, altitudo A B, ad pyramidem, cuius basis triangulum E D B, & altitudo A C; ergo vt illa ad istam pyramidem, ita G F ad F E, quod &c.

PROP. XX. PROB. XI.

Exposita quinti elementi figura, & ex sex rationibus, de quibus in eodem elemento egimus datis tribus quibuscunque reliquas duas inuenire.

PRoblema hoc habet viginti casus; nam multiplicato 6 in 5 fit 30, ex cuius dimidio 15 ducto in 4 fit 60; huius tertia pars est 20, numerus scilicet omnium ternariorum prouenientium ex numero 6.

I. Sint datæ tres rationes CD ad DE, vt 12 ad 8, EF ad FG, vt 4 ad 12, & GH ad HA, vt 8 ad 4; debemus reliquas tres inuestigare. Vt factum est in elemento quinto suspendamus ex angulis CEGA grauia CEGA, ita vt pondera sint inter se reciprocè, vt sunt longitudines ex quibus pendent; Itaque si C ponderabit vt 4, ponderabit E vt 6, quia ED ad DC est, vt 8 ad 12, vel 4 ad 6. Eadem ratione existente E vt 6, erit G vt 2; nam GF ad FE est vt 12 ad 4, seu 6 ad 2; & denique si G fuerit 2 erit A 4; est enim AH ad HG, vt 4 ad 8, imò vt 2 ad 4; quare C erit 4, E 6, G 2, & A 4; est verò (vtpotè figura elementi quinti) AB ad BC, vt pondus C 4 ad pondus A 4; ergo AB ad BC erit vt 4 ad 4, videlicet æqualitatis; deindè HI ad ID, vt pondus D 10 ad pondus H 6, hoc est vt 10 ad 6; & pariter BI ad IF, vt graue F 8 ad B 8, nempe vt 8 ad 8, seu æqualitatis, & ideo manifestauimus tres reliquas rationes AB ad BC æqualitatis, quemadmodum BI ad IF, & HI ad ID, vt 10 ad 6, vel 5 ad 3. tab. 2. fig. 22.

II. III. IV. Si verò tres datæ rationes fuerint EF ad FG; GH ad HA; AB ad BC: vel GH ad HA, AB ad BC, & CD ad DE: vel AB ad BC; CD ad DE; EF ad FG, eodem modo, vt supra, absoluemus problema.

V. Sint datæ tres rationes AB ad BC, vt 5 ad 6; BI ad IF æqualitatis; & GF ad FE, vt 8 ad 3; oporteatq; reliquas notificare. Suspendamus ex angulis grauia CEGA, vt docet elementum quintum, erit ergo vt AB ad BC, hoc est vt 5 ad 6, ita graue C ad A; si igitur C pendit 5, A pendet 6. Deindè quia vt FI ad IB, idest, vt 1 ad 1, ita pondus B 11 ad F, erit F quoque 11; est autem GF ad FE, vt 8 ad 3; & componendo GE ad FE, vt 11 ad 3, in

qua proportione est etiam pondus F ad G; ergo cum F pendat 11, pendet G 3, & reliquum pondus E 8; itaque statim habentur reliquæ, hoc est H I ad I D, vt pondus D 13 ad pondus H 9; itemque A H ad H G, vt graue G 3 ad graue A 6, & denique C D ad D E, vt graue E 8 ad graue C 5.

VI. Quod si tres datæ rationes fuerint eædem quas modò manifestauimus, dabimus reliquas tres eodem modo.

VII. Dentur tres rationes G F ad F E, vt 6 ad 5, H I ad I D, vt 13 ad 9, & F I ad I B, vt 11 ad 11, videlicet æqualitatis, debemus reliquas etiam inuestigare. Quoniam vt G F ad F E, ita pondus E ad G; est verò G F ad F E, vt 6 ad 5; si ergo ponatur pondus E esse 6, erit G 5; deindè quia vt B I ad I F, imò vt 11 ad 11, ita F pondus ad B; estque F 11, ergo B erit pariter 11, quare pondus I erit 22; est autem H I ad I D, vt 13 ad 9; ergo componendo H D ad D I, hoc est pondus I ad H, erit vt 22 ad 9; & ideò cum pondus I sit 22, erit graue H 9; est autem pondus I 22 æquale põderibus H 9, & D, igitur D erit 13; similiter quia H 9 est ęquale duobus ponderibus G 5, & A; & D 13 æquale duobus ponderibus E 6, & C, erit A 4, & C 7; eritque propterea A B ad B C, vt pondus C 7 ad pondus A 4, G H ad H A, vt pondus A 4 ad pondus G 5, & denique E D ad D C, vt pondus C 7 ad E 6.

VIII. IX. X. Si verò tres datæ rationes fuerint A B ad B C, H I ad I D, B I ad I F: vel tres C D ad D E, B I ad I F, & D I ad I H: aut tres G H ad H A, F I ad I B, & H I ad I D; eodem ratiocinio problemati satisfaciemus.

XI. Sint vlterius datæ tres aliæ rationes G H ad H A, vt 5 ad 17, F I ad I B, vt 7 ad 16, & G F ad F E, vt 15 ad 17, oportet reliquas tres indagare.

Quia, vt G H ad H A, hoc est vt 5 ad 17, ita pondus A ad G, si graue A sit 5, graue G erit 17. Item cum E F ad F G, hoc est 17 ad 15, sit vt pondus G ad E, & pondus G sit 17, pondus E erit 15; & denique, quia B I ad I F, hoc est 16 ad 7; vel 32 ad 14 est vt pondus F ad B, cumque F sit 32, erit B 14; sed B 14 est pondus grauium A 5, & C; ergo C erit 9, atque adeò C D ad D E erit vt pondus E 15 ad pondus C 9; similiter A B ad B C erit vt C 9 ad A 5; & deniquè H I ad I D erit vt D 24 ad H 22.

XII. XIII. XIV. XV. XVI. XVII. XVIII. Septem alij casus huic prædicto similes eodem modo soluuntur.

XIX.

XIX. Sint datæ rationes G F ad F E, vt 8 ad 9, H I ad I D, vt 15 ad 19, & A B ad B C, vt 7 ad 10. *tab. 2. fig. 23.*

Cauendum tamen eſt, ſi tres G E, H D, A C, fuerint parallelæ, ne aliæ tres G A, F B, E C ſint æquidiſtantes.

HVnc caſum reſoluemus algebricè per ſecundas radices hoc pacto.

Quoniam vt G F ad F E, ita pondus E ad G, ſi ponatur E ℞ 1, erit G ℞ $1\frac{1}{8}$. Item quia A B ad B C, eſt vt pondus C ad A, ſi voluerimus vt C pendat A 1, A pendet A $1\frac{3}{7}$, & quia H I ad I D eſt vt pondus D ad H, ponitur verò D vt 15, erit H vt 19, verùm quia 19, pondus nimirum H æquatur duobus ponderibus G A, hoc eſt ℞ $1\frac{1}{8}$ ✢ A $1\frac{3}{7}$; & D æquale eſt duobus C E, hoc eſt 15, nimirũ ℞ 1 ✢ 1 A; erit vt 19 ad 15, ita ℞ $1\frac{1}{8}$ ✢ A $1\frac{3}{7}$ ad ℞ 1 ✢ 1 A; quare productum ex medijs, æquale erit ei quod ex extremis, nempe ℞ 19 ✢ 19 A æquale erit ℞ $16\frac{7}{8}$ ✢ A $21\frac{3}{7}$; ablatiſq; communiter ℞ $16\frac{7}{8}$ ✢ 19 A relinquetur æquatio inter ℞ $2\frac{1}{8}$, & A $2\frac{3}{7}$; & ſi fiat vt A $2\frac{3}{7}$ ad ℞ $2\frac{1}{8}$, ita A 1 ad alium numerum prodibit ℞ $\frac{119}{136}$, pretiũ vnius A, & idcircò ℞ $1\frac{119}{136}$, hoc eſt ℞ $\frac{255}{136}$ æqualis erit numero abſoluto 15, aggregato vid. duorum granium C E, hoc eſt ℞ 1 ✢ A 1. Diuiſo igitur 15 per fractionem $\frac{255}{136}$ exit abſolutus numerus $\frac{2040}{255}$, hoc eſt 8 pretium vnius radicis, & propterea graue E, quod ponebatur ℞ 1, erit 8; & G ℞ $1\frac{1}{8}$ erit 9. Deinde quia (vt diximus ſuperius) põdus D ęquatur duobus E C, hoc eſt 15, erit E 8, & C 7, quarè A 1 eſt 7; igitur A nimirùm A $1\frac{3}{7}$ erit 10: quod cum ita ſit, erit G H ad H A, vt pondus A 10 ad pondus G 9; C D verò ad D E, vt pondus E 8 ad pondus C 7; & denique F I ad I B, vt B 17 ad pondus F 17, quod erat &c.

XX. vltimò. Si datæ rationes fuerint G H ad H A, F I ad I B, & E D ad D C, ſuppoſita figura, vt dictum eſt, erit hic caſus ſimilis præcedenti XIX., atque adeo tres reliquas, ſimili artificio, aperiemus.



PROP.

PROP. XXI. THEOR. X.

Expoſita ſecundi elementi figura iungatur inſuper D B, quæ ſecet A K in L. Dico B L ad L D eſſe vt pondus D ad B; K L verò ad L A vt duplum ponderis G ad pondus K.

tab. 2. fig. 24. INtelligantur in A ſuſpenſa duo pondera G. Quoniam D eſt centrum duorum grauium I G, itemque B centrum duorum H G, erit in libra D B centrum grauitatis omnium grauium I G G H. Pariter quia K eſt centrum duorum grauium I H, & in A eſt duplum ponderis grauis G; erit in libra A K centrum omnium grauium I H G G; quod cum vnicum ſit, in communi ſectione L librarum D B K A exiſtet, & ideo vt B L ad L D, ita pondus D ad pondus B; atq; vt A L ad L K, ita pondus K ad duplum G, quod &c.

PROP. XXII. THEOR. XI.

Duæ lineæ A B, B C comprehendentes angulum B ſecent alias duas lineas A D, D C comprehendentes angulum D, ſecent, inquam, in punctis A C, ſintque lineæ C B, B A, A D, D C ita diuiſæ in punctis F G H E, vt ratio D E ad E C componatur ex rationibus B F ad F C, A G ad G B, & D H ad H A. Dico iunctas H F, G E ſe inuicem ſecare, puta in I, ideoque in vno plano exiſtere: hoc autem vt conſtet, ſuſpendere oportebit ex punctis A B C D grauia L M N K, ita vt G I ad I E ſit vt duo grauia K N ad duo L M; & H I ad I F, vt duo M N ad duo L K, quod ſic præſtabimus.

tab. 3. fig. 25. 26. 27. FIat vt B F ad F C, ita graue N ad M; vt A G ad G B, ita M ad L; & vt D H ad H A, ita L ad K. Pondus N ad K componitur ex rationibus grauium N ad M ad L ad K, videlicet ex rationibus rectarum B F ad F C, A G ad G B, & D H ad H A; ex iiſdem verò componitur D E ad E C; ergo vt D E ad E C, ita N ad K. Cum igitur E ſit centrum libræ C D, hoc eſt grauium N K; & G centrum grauium L M, erit in libra G E centrum omnium grauium K N L M; eademque ratione cum H ſit centrum grauium L K, & F ſit centrum grauium M N, erit item in libra H F centrum omnium grauium L K M N in eadem priori poſitione, quod cum vnicum ſit,

ne-

necesse est, vt libræ, seu lineæ GE, HF se inuicem secent, vt in I, eritque hoc centrum vtriusque libræ, & propterea vt HI ad IF, ita duo grauia MN ad duo LK; similiter vt recta GI ad IE, ita duo grauia KN ad duo grauia LK, quod &c.

PROP. XXIII. THEOR. XII.

Sit pyramis, cuius vertex G, basis autem triangulum AEC; & descripta in triangulo EGC secundi elementi figura, qualis est EIGLCDK, iungamus duas lineas AI, AL; sumpto autem in AG quolibet puncto N, ducamus NE secantem AI in H, & NC secantem AL in M; actisque insuper lineis GHF, GMB, intelligamus iunctas esse CF, AD, EB. Dico prius has lineas in eodem puncto veluti P sese inuicem secare; præterea conceptis intra pyramidem lineis AK, EM, CH, GP, FL, IB, ND, has quoque sibi ipsis in eodem simul puncto O occurrere.

Vt autem hæc liquidò constent suspendemus de more ex angulis eiusdem pyramidis in ratione reciproca longitudinum grauia RS QT; quo posito tria quælibet ad reliquum, vel duo quæuis ad reliqua, siue duo quælibet ad vnum, aut tandem vnum ad vnum erunt inter sese reciprocè mira quadam concordia, vt longitudines ex quibus pendent.

Fiat vt GI ad IE, ita pondus S ad Q, vt CL ad LG, ita pondus Q ad T, atque vt AN ad NG, ita pondus Q ad R; sitque R in A, S in E, T in C, & Q in G; quia in elemento secundo cuius grauia SQT, & centrum K, est GI ad IE, vt pondus S ad Q, CL verò ad LG, vt Q ad T, erit ex prob. 2. Etiam CD ad DE, vt S ad T, eademque ratione in elemento secundo, cuius grauia sunt RQS, erit EF ad FA, vt R ad S. Pariter in elemento secundo, cuius grauia RQT, & centrum M erit recta AB ad BC, vt pondus T ad R; igitur cum EF ad FA sit vt R ad S, CD ad DE, vt S ad T, & AB ad BC, vt T ad R; lineæ EB, AD, CF secabunt sese in eodem puncto veluti P: fiet autem ex ipsis vnà cum triangulo AEC elementum secundum, cuius grauia RST, & centrum P; quare in linea GP erit centrum grauitatis omnium grauium RSTQ: & pariter quia H est centrum grauitatis grauium RSQ: K grauium SQT, & M grauium RQT, erit idem centrum grauium RSTQ in- *tab. 3. fig. 28.*

vna-

vnaquaque librarum A K, E M, C H; at quia vnicum illud est, lineæ G P, A K, E M, C H occurrent sibi ipsis in eodem puncto O, nempe in centro grauitatis grauium omnium R S T Q. Deinde quia L est centrum grauitatis grauium Q T, & F grauium R S, erit in libra F L punctum O, vtpotè centrum grauitatis grauium R S T Q: idem dic de libris I B, D N; omnes igitur libræ, seu lineæ G P, A K, E M, C H, F L, I B, D N, sibi ipsis in eodem puncto O communi centro occurrent; & ideò vt C O ad O H, ita tria grauia R Q S, hoc est pondus H ad C; vt E O ad O M, ita pondus M, tria videlicet grauia R Q T ad S; vt A O ad O K, ita pondus K, grauia videlicet S Q T ad R; & vt O G ad O P, ita pondus P, seu grauia S T R ad Q; item vt pondus L ad F, hoc est grauia Q T ad R S, ita F O ad O L; vt pondus N ad D, grauia nempè R Q ad S T, ita D O ad O N; & vt pondus I ad B, grauia nimirum Q S ad R T, ita B O ad O I. Reliquæ verò rationes ex secundis elementis, quorum centra H M K P innotescunr, & ideò totum propositum manifestũ est.

PROP. XXIV. THEOR. XIII.

Sit pyramis, cuius vertex E, & basis quodlibet quadrilaterum C B A D; ductisque intra triangulum B E C, tribus rectis se inuicem secantibus in eodem puncto N, vt sunt lineæ B N K, C N O, E N P, adeò vt fiat figura secundi elementi; iungantur A O, D K, & in triangulis B E A, C E D perficiantur duæ figuræ eiusdem elementi B O E F A R Q, & C K E G D M L; iunctis verò lineis A G, D F secantibus sese in H producatur E H in I, & iungantur duæ lineæ I P, R M, vt sibi ipsis occurrant in puncto S. Demùm intelligantur intra pyramidem lineæ E S, Q M, H P, L R, N I; dico has secari in eodem puncto veluti T. Vt autem hoc demonstremus suspendemus, vt factum est in præcedenti, ex angulis eiusdem pyramidis quinque pondera ✠ V X Z ℞, quorum duo quælibet ad reliqua; vel duo ad duo, aut duo ad vnum, siue vnum ad vnum, vel vnum ad quatuor erunt reciprocè inter se, vt longitudines earum librarum ex quibus pendent.

tab. 3. fig. 29. FIat vt D G ad G E, ita pondus ℞ ad ✠, vt C K ad K E, ita ℞ ad Z, atque vt A F ad F E, ita ℞ ad V. Iam quia in quatuor singulis figuris elementi secundi, quas in superficie pyramidis, basi excepta,

con-

construximus, tria pondera adaptauimus iuxta leges secundi elementi, erit B R ad R A, vt pondus V ad ✠; C P ad P B, vt ✠ ad Z, & D M ad M C, vt Z ad X. Quare cum D I ad I A, hoc est pondus V ad X componatur ex rationibus ponderum V ad ✠ ad Z ad X, rectarum videlicet B R ad R A, C P ad P B, & D M ad M C, erit A R B P C M D I A S figura elementi quinti, cuius grauia V ✠ Z X; itaque cum in S sit centrum illorum, & in E sit graue ℞, erit in linea E S centrum grauitatis omnium grauium V ✠ Z X ℞. Rursus quia in R est centrum grauium V ✠, atque in L centrum grauium ℞ Z X, erit item in libra R L centrum omnium grauium V ✠ Z X ℞ in eadem priori positione, quod cum vnicum sit, existatque eadem ratione in libris pariter N I Q M H P, necesse est, vt ad inuicem secentur omnes dictæ lineæ E S, L R, N I, Q M, H P, in eodem puncto, veluti T, quod cum sit simul centrum earundem librarum, constat R T ad T L esse vt tria grauia Z ℞ X ad duo V ✠; I T ad T N, vt tria grauia ✠ ℞ Z ad duo V X; M T ad T Q, vt tria ✠ V ℞ ad duo Z X; H T ad T P, vt duo ✠ Z ad tria V ℞ X; & demùm E T ad T S, vt quatuor V ✠ Z X ad ℞; Reliquæ verò rationes ex elementis secundo, & quinto manifestæ sunt; patet ergo propositum.

PROP. XXV. THEOR. XIV.

Sit pyramis, cuius vertex M, basis autem triangulum A E C, & ducta ✠ H, quæ secet E M in ✠, atque A M in H, ab eodem quomodolibet assumpto puncto K iungamus duas lineas K H, K ✠; linea verò M F secet H ✠ in G; item M B secet H K in I, & M D secet K ✠ in L; iunctisque F B, A D sibi occurrentibus in O, agantur rectæ H L, I G, M O. Dico has se inuicem secare, vt in ℞; grauia verò suspensa ex angulis seruabunt, vt in præcedentibus, illam concordiam rationum.

Fiat vt C B ad B A, ita pondus P ad Q, vt autem E D ad D C, ita Q ad R, vt verò A F ad F E, ita R ad S; quo posito punctum O erit centrum grauitatis ponderum S P Q R. Deindè vt M K ad K C, ita fiat pondus Q ad V, & vt M ✠ ad ✠ E, ita R ad X; eritq; similiter punctum L centrum grauitatis grauium R Q V X; Demùm vt M H ad H A, ita ponatur pondus S ad Z, & P ad T, & erit G pariter centrum grauitatis grauium R X Z S, I verò grauium P T V Q & H grauium S Z T P; Quamobrem perspicuum est in vnaquaque librarum H L, I G, M O existere centrum grauitatis grauium omnium suspensorum, quod cum vnicum sit, necesse *tab. 3. fig. 30.*

est vt se inuicem in eodem puncto veluti B secent; est autem huiusmodi centrum illud etiam earundem librarum; ergo constat propositum.

PROP. XXVI. THEOR. XV.

Sit pyramis, cuius vertex H, & basis triangulum A E C; productis verò planis triangulorum A H E, E H C, C H A vltra punctum H secentur hæc alio plano; sintque horum planorum communes sectiones lineæ A H I, C H N, E H L, N L, N I, I L; & constructa in basi propositæ pyramidis figura elementi secundi A F E D C B G, iungantur lineæ F H, D H, B H, quæ productæ occurrent lateribus oppositi trianguli; itaque occurrant in punctis deinceps K M O, & iungantur lineæ N K, I M, L O; Dico has in eodem puncto P se inuicem secare, & insuper, si iuncta G H producatur, occurrere triangulo opposito, in prædicto puncto P. Hoc verò, vt manifestum fiat suspendemus ex angulis duorum triangulorum N L I, A E C in ratione reciproca longitudinum, pondera Q S R X V T, quæ ita sibi inuicem pulcherrimè respondebunt, vt vnum ad vnum, vel duo ad vnum, aut duo ad duo, vel tria ad tria, sint inter sese, vt sunt reciprocè longitudines ex quibus pendent.

tab. 3. fig. 31. Fiat vt E D ad D C, ita pondus R ad S; vt A F ad F E, ita S ad Q; vt N H ad H C, ita R ad X; vt L H ad H E, ita S ad V; & vt I H ad H A, ita Q ad T; sit autem R in C, S in E, Q in A, T in I, V in L, & X in N; Quoniam igitur E D ad D C est vt R ad S, & A F ad F E, vt S ad Q, erit G centrum grauium Q S R, & B centrum ipsorum Q R. Et quia I H ad H A est, vt Q ad T; A B ad B C, vt R ad Q (cum B sit centrum grauium Q R) & N H ad H C, vt R ad X, erit, ex quarto problemate, punctum O centrum grauium X T. Eadem ratione quia F est centtum grauitatis grauium Q S, H grauium Q T, & S V, erit K centrum grauium V T. Pariter cum D sit centrum grauium S R; H verò R X, & S V, erit M centrum grauium X V, & propterea iunctæ lineæ N K, I M, L O in eodem puncto P se inuicem secabunt, eritque illud centrum grauium X V T; est autem punctum H centrum grauium S V, R X, Q T, omnium videlicet S V R X Q T, & G centrũ grauiũ Q S R, producta igitur libra G H transibit per P centrum reliquorum grauium X V T; eritq; G H ad H P, vt tria grauia X V T ad tria Q S R, & sic de alijs enunciatis rationibus. exlem. 1.

STATICÆ CONSTRVCTIONIS LIBER SECVNDVS.

LEMMA I.

Si qualibet figura rectilinea, circulo, vel ellipsi, ita fuerit circumscripta, vt singula eius latera prædictum circulum, aut ellipsim tangant; sic ipsa latera per contactus diuidentur, vt ratio partium vnius, ex rationibus partium similiter sumptarum reliquorum deinceps laterum componatur.



SIT circa circulum, vel ellipsim BDF, triangulum ECA, vel quadrilaterum ACEG; seu quodlibet aliud polygonum; puncta verò contactus sint BDF +. Ostendendum est CD ad DE, in triangulo componi ex rationibus AF ad FE, & CB ad BA; sed in quadrilatero, ex tribus rationibus GF ad FE, A + ad + G, & CB ad BA. *tab. 4. fig. 32. 33. 34.*

In circulo tangens DC æqualis est CB; BA ipsi AF; & FE ipsi ED; (si figura circumscripta triangulũ sit) ergo quia CD ad DE cõponitur ex rationibus DC ad CB; CB ad BA; BA ad AF; AF ad FE; FE ad ED; si auferantur rationes æqualitatis DC ad CB; BA ad AF; FE ad ED, remanebit composita ex duabus tantum rationibus CB ad BA; AF ad FE, vel ex iisdem perturbatè acceptis; nempe AF ad FE, & CB ad BA. Eadem ratione demonstrabimus in quadrilatero, quod circumscriptum est circulo, rationem CD ad DE componi ex rationibus GF ad FE; A + ad + G, & CB ad BA: quarè manifestum est id, quod proposuimus, quoties triangulum, seu quadrilaterum, vel quolibet aliud polygonum fuerit circa circulum.

Sed si fuerit circa ellipsim, fieri potest, vt cylindrum aliquem inueniamus, cuius eadem proposita ellipsis sit sectio (hoc autem inferius demonstrabimus) huius itaque cylindri basis sit circulus *tab. 4. fig. 35.*

GLI, dicta verò ellipsis sit sectio cylindri, quam indicent literæ FDB, cui circumscriptum sit triangulum EAC; à contactibus verò FDB circumscriptæ figuræ cadant in puncta GIL circumferentiæ, lineæ FG, DL, BI; deindè plana ducamus per EA, FG, AC, BI, & EC, DL, hæc tangent cylindri superficiem secundùm lineas FG, DL, BI. Producto demum basis plano sint omnes horum planorum communes sectiones ME, AH, CK; itemque MGH, HIK, KLM. Et quia priora plana ducta sunt per lineas FG, BI, DL, quæ inter sese sunt æquidistantes, erunt & eorum planorum communes sectiones, veluti AH, CK, EM inter se, & lateribus prædictis FG, BI, DL parallelæ; ideoq; etiā AF ad FE, vt HG ad GM, CB ad BA, vt KI ad IH, & CD ad DE, vt KL ad LM; componitur verò, in circulo GLI, ratio KL ad LM ex rationibus HG ad GM, & KI ad IH; ergo etiam CD ad DE componetur ex rationibus AF ad FE, & CB ad BA. Similiter ostendemus in quadrilatero CBA ✠ GFED, rationem CD ad DE componi ex rationibus EF ad FG; A ✠ ad ✠ G; & CB ad BA. Eodem processu vtemur, si circumscripta sit figura quælibet alia, quod erat &c.

Prop. 19. l. 6. Euclidis restituti à Io: Alphonso Borelio.

Schol. pr. 2. lib. 4. eiusdem Borelij.

LEMMA II.

Reliquum est vt ostendamus id, quod in superiori lemmate assumpsimus; proposita videlicet qualibet ellipsi, puta FDB ✠, cylindrum quendam reperire, ipsumque plano sic abscindere, vt facta sectio, similis, & æqualis sit propositæ ellipsi.

tab. 4. fig. 36.

SIT axis propositæ ellipsis linea ✠D, secunda verò diameter FB, cui sumatur æqualis AC, circa quam describatur circulus AC; iam quilibet Cylindrus rectus, non autem Scalenus, super dictum circulum, tanquam basim constitutus, erit quæsitus. Ponamus illum esse, cuius parallelogramum per axem sit AMGC, & ipsius diagonalis GA maior sit axe ✠D, latus verò GM sit minus axe: ergo si centro G, interuallo linea GE æquali ✠D, circulus describatur, diuidet eiusdem circuli circumferentia lineam AM; sit ideo sectionis punctum E, & iuncta GE producatur ad partes basis, vt secet AC productam in O, à quo puncto agamus lineam ON in eodem circuli plano perpendicularem

ad O C, perque lineas O N, G E O, ducto plano, fiat in cylindro sectio G I E H, quæ cum ellipsis sit, ostendemus etiam esse similem, & æqualem propositæ F ✠ BD. Diuidamus enim rectam E G bifariam in P, per quod vtpote centrum ellipsis transeat vsque ad cylindri superficiem ex vtraque parte producta recta I P H parallela N O, erit hæc propterea ordinatim applicata, & ad rectos angulos ad axem E G, & ideo linea I P H dicetur secunda diameter, quæ quidem æqualis erit ipsi A C, seu F B. Iam si concipiamus ellipsim E I G H superpositam ellipsi D F ✠ B, ita vt congruat linea ✠ D lineæ G E, congruet etiam linea F B ipsi I H, atque adeò (quod etiam ostendemus) ellipsis ellipsi coaptabitur, quod &c.

ex Sereno de sectione cylindri.

ex eodem Sereno.

LEMMA III.

Si, concepta ellipsi super ellipsim, duæ coniugatæ diametri vnius, duabus alterius congruerint; erunt ellipses prædictæ inter se similes, & æquales. *Def. 1. conicor.*

SIT ellipsis F A B C E superposita ellipsi B A C E D, quarum coniugatæ diametri A E B C communes sint. Dico sectiones istas sibi inuicem congruere; Nam si fieri potest assignetur aliquod punctum veluti F, quod sit in vna tantùm ellipsi. Ordinatim applicetur ad diametrum E A linea F D G secans alteram ellipsim in D, dictamque diametrum in G: indè à puncto E constituamus ad rectos angulos ipsi A E rectam E H tertiam proportionalem duarum E A, B C; Erit igitur E H latus rectum, & E A transuersum; verùm quia tàm applicata F G, quam D G potest idem rectangulum G E H deficiens figura simili, & similiter posita ei quæ lineis A E, E H continetur, erunt dictæ duæ applicatæ, propter ellipticas sectiones, longitudine etiam inter se æquales, totum scilicet parti, quod est absurdum; quare non potest assignari punctum, quod in vtraque ellipsi non existat, atque adeò prædictæ ellipses similes, & æquales inter se erunt, quod &c.

tab. 4. fig. 37.

15. l. 1. conic.



PROP.

PROP. I. THEOR. I.

Si circulo, vel ellipsi fuerit circumscriptum quodlibet triangulum; rectæ lineæ à contactibus deductæ ad oppositos angulos eiusdem trianguli, se inuicem in eodem puncto secabunt, & insurget, ablato circulo, figura illa, quam in secundo elemento considerauimus.

tab. 4. fig. 38. SIT circulus, vel ellipsis BFI, circa quam sit triangulum SAGC, contingens prædictam sectionem in punctis FIB, iunctæq; duæ lineæ AI, CF se inuicem secent in E; dico quod si iungatur GE, & protrahatur, transibit per reliquum contactum B. Si enim hoc verum non est transeat per H; & quia propter elementum secundum recta CH ad HA, pondus videlicet A ad C componitur ex rationibus grauium A ad G ad C, hoc est rectarum GF ad FA, & CI ad IG; itemque propter conicam sectionem, recta CB ad BA ex ijsdem duabus rationibus componitur, erit vt CH ad HA, ita CB ad BA, & componendo, CA ad AH, vt CA ad AB; ideoque AH erit æqualis ipsi AB, totum scilicet parti, quod est absurdum. Necesse est igitur, vt iuncta linea GE si producatur cadat in contactum B. *lem. 1. 2. huius.*

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quod, si ratio CB ad BA componatur ex rationibus GF ad FA, GI ad IG, & iungantur AI, CF, GB, conuenient in E. Nam si exempli gratia GB non transeat per E, in quo se mutuò secant AI, CF, si iungatur GE, & producatur, cadet in aliud punctum H. Erit igitur CH ad HA, vt ostensum est, propter elementum secundum, composita ex rationibus GF ad FA, & CI ad IG: Quare vt CB ad BA, ita CH ad HA, & componendo, vt CA ad AB, ita CA ad AH, quod est absurdum.



PROP.

PROP. II. THEOR. II.

Si circulo, vel ellipsi circumscriptum fuerit quoddam quadrilaterum, & iungantur opposita puncta contactuum, ita vt iungentes lineæ se inuicem intra circulum, vel ellipsim secent, erit huiusmodi figura, ablata coni sectione, illa eadem, quam in quinto elemento considerauimus.

NAM accepta figura lemmatis primi si concipiantur ductæ duæ lineæ BF, D✠, manifestum est propositum, quia ibi ostendimus CD ad DE componi ex rationibus GF ad FE, A✠ ad ✠G, & CB ad BA. *tab. 4. fig. 32. 33. 34.*

PROP. III. THEOR. III.

Si in triangulo duo latera angulum comprehendentia similiter secentur, basi verò bifariam secta, ab angulis ad opposita sectionum puncta lineæ ducantur, istæ se inuicem in eodem puncto secabunt; ita vt figura ex ijsdem lineis composita sit illa secundi elementi.

SIT triangulum ACE, vtque AB ab BC, ita ponatur ED ad DC; basis verò AE sit in G bifariam secta, & iunctis AD, EB secantibus se se in F, connectamus lineam CF: Dico, hanc productam transire per punctum G; quod si verum non sit, incidat si fieri potest in H; & quia, propter elementum secundum, EH ad HA, graue nimirum A ad E componitur ex rationibus grauium A ad C ad E, rectarum videlicet CB ad BA, & ED ad DC; imò rectarum CB ab BA ad BC; erit EH ad HA, vt BC ad BC; & ideo EH æqualis erit ipsi HA: Sed etiam EG est æqualis GA; ergo vt EH ad HA, ita EG ad GA; & componendo, vt EA ad AH, ita eadem EA ad AG, quare AG erit æqualis ipsi AH, totum videlicet parti, quod est absurdum; non igitur in H, sed in G cadet linea CF, quod &c. *tab. 5. fig. 39.*



PROP.

PROP. IV. THEOR. IV.

Si in quadrilatero ducta fuerint duæ se inuicem secantes lineæ, quarum vnaquæque duo opposita latera in eadem ratione diuidat, figura resultans erit quintum elementum.

tab. 5. fig. 40. SIT quadrilaterum ACEG, sitque CB ad BA, vt EF ad FG, itemq; ED ad DC, vt GH ad HA, & iungantur lineæ BF, HD, quæ se inuicem secent in I. Dico figuram hanc illam esse, quam in quinto elemento considerauimus. Si enim hoc verum non est, ratio ED ad DC, non erit illa, quæ componitur ex rationibus AB ad BC, GH ad HA, & EF ad FG. Sit igitur alia EK ad KC. Itaque cum EK ad KC componatur ex prædictis rationibus, imò ex ijsdem AB ad BC, EF ad FG, & GH ad HA perturbatè acceptis; quin etiam ex rationibus AB ad BC, CB ad BA, & GH ad HA; seù tandem ex rationibus AB ad BA, & GH ad HA; vel ex ipsis GH ad HG ad HA; erit EK ad KC, vt GH ad HA: Sed in eadem ratione est etiam ED ad DC; ergo vt EK ad KC, ita ED ad DC, & componendo, EC ad CK erit vt eadem EC ad CD, æqualis igitur est CK ipsi CD, totum parti, quod est absurdum, quod &c.

PROP. V. THEOR. V.

Si tria trianguli latera ita diuisa sint, vt ratio partium vnius fiat ex rationibus partium reliquorum laterum: inde iunctis diuisionum punctis, tribus rectis lineis, adeout ex ipsis constet triangulum inscriptum priori, cuius etiam latera eodem modo partiamur; demum verò ab angulis trianguli ad reperta puncta secundæ diuisionis, tres alias lineas ducamus, istæ si producantur in idem punctum conuenient.

tab. 5. fig. 41. SIT triangulum ADG, cuius tria latera GA, AD, DG, ita diuisa sint in HCE, vt GH ad HA componatur ex rationibus DC ad CA, GE ad ED. Iungantur lineæ HC, CE, EH, quæ ita secentur in punctis NLK; vt similiter EL ad LC componatur ex rationibus HN ad NC, & EK ad KH. Iungamus demum lineas

DL,

DL, GK, AN. Dico, has productas, in eodem puncto se inuicem secare. Producantur ergo, & linea GK occurrat lateri DA in B; ipsa verò DL lateri AG in I, & recta demum AN secet DG in F.

Quoniam in elemento tertio, cuius grauia A; C-A; E-G; G, quorum centrum L; recta GI ad IA, hoc est pondus A ad G componitur ex rationibus grauium A ad C ad F ad G, rectarum videlicet CD ad DA; EL ad LC; & DG ad ED; ratio autem EL ad LC componitur ex rationibus HN ad NC, & EK ad KH; erit GI ad IA composita ex rationibus CD ad DA; HN ad NC; EK ad KH; & DG ad ED; Seu ex rationibus CD ad CA ad AD; HN ad NC; EK ad KH; DG ad GE ad ED; ex duabus verò rationibus DC ad CA, & GE ad ED componitur HG ad AH, quæ est composita ex duabus HG ad GA ad AH; ratio igitur GI ad IA, componetur ex rationibus, licet perturbatè sumptis HG ad GA ad AH; CA ad AD; DG ad GE; HN ad NC; & EK ad KH; vel denuo ex iisdem perturbatè acceptis, nimirum HG ad GA; EK ad KH; DG ad GE; CA ad AD; HN ad NC; GA ad AH; & quia in elemento tertio, cuius grauia A, H-A; E-D; & D, quorum centrum K, componitur DB ad BA, pondus videlicet A ad D ex rationibus ponderum A ad H ad E ad D; imò rectarum HG ad GA; EK ad KH; & DG ad GE; & in elemento pariter tertio, cuius grauia D; C-D; H-G; G, centrumque N, ratio GF ad FD, ponderis nempe D ad G componitur ex rationibus ponderum D ad C ad H ad G, rectarum scilicet CA ad AD; HN ad NC; & GA ad AH: ratio GI ad IA, quæ composita fuit ex rationibus HG ad GA; EK ad KH; DG ad GE; CA ad AD; HN ad NC; & GA ad AH, componetur etiam ex rationibus DB ad BA, & GF ad FD; ideoque ex coroll. prop. 1. huius, lineæ AN, DL, GK conuenient in idem punctum, quod erat &c.

PROP. VI. THEOR. VI.

Si latera, & basis trianguli bifariam secta sint, atque à sectione basis duæ rectæ indefinitæ per diuisiones laterum ducantur; inde per verticem trianguli, extra ipsum, alia quædam recta perducta secet eas lineas, quas egimus à dicto basis puncto; tandem à duobus illarum diuisionum punctis ad angulos basi adia-

adiacentes, & ad easdem partes duquandur [illegible] erunt ipsæ inter se parallelæ.

tab. 5. fig. 42. SIT triangulum D A G, cuius & latera D A, A G, & basis D G bifariam secentur in punctis E K F, iunctisq; F E, F K protrahantur indefinitè; ducta verò vtrinq; per verticem A, recta B A H quomodocunque secante prædictas lineas indefinitas in punctis B H, ita tamen vt tota sit extra triangulum A G D, iungantur B D, H G; dico has parallelas inter se esse. Vel enim B H, D G sunt inter se æquidistantes, vel non; Si fuerint æquidistantes iungatur E K, quæ erit parallela ipsi D G, & propterea etiam rectæ B H. Quare cum D G ad E K sit vt D A ad A E, siue vt A D ad D E, vel B F ad F E propter suppositas parallelas; vt verò B F ad F E, ita B H ad E K; eandem proportionem habebit D G ad E K, quam B H ad eandem E K, & ideo D G, B H æquales erunt, suntq; etiam æquidistantes, ergo B H G D spatium parallelogrammum erit, & ideo H G, B D erunt etiam ipsæ æquidistantes: Quod si B H, D G parallelæ non sint protrahantur donec sibi occurrant in puncto I. Et quia B I ad I H componitur ex rationibus B I ad I A ad I H; recta verò B I ad I A, hoc est pondus A ad B in elemento primo, cuius grauia B I D, & centrum E, componitur ex rationibus grauium A ad E ad B, rectarum videlicet E D ad D A, & F B ad F E; est verò F B ad F E, hoc est B H ad H A, vt F H ad H K ob parallelogrammum A K F B; erit B I ad I A composita ex rationibus E D ad D A, & F H ad H K. Item, quia in elemento primo, cuius grauia A I F, & centrum K, componitur I A ad I H, pondus videlicet H ad A, ex rationibus ponderum H ad K ad A, rectarum scilicet K F ad F H, & A G ad G K, vt autem A G ad G K, ita D A ad D E; componitur igitur I A ad I H ex rationibus K F ad F H, & D A ad D E; idcirco prior ratio B I ad I H fiet ex rationibus E D ad D A, F H ad H K, K F ad F H, & D A ad D E; vel ex iisdem perturbatè sumptis, hoc est ex rationibus E D ad D A ad D E; K F ad F H ad H K; itaque vt B I ad I H, ita K F ad H K.

Rursus D I ad I G componitur ex rationibus D I ad I F ad I G: Sed in elemento primo, cuius grauia D I B, & centrum E, recta D I ad I F, hoc est pondus F ad D componitur ex rationibus ponderum F ad E ad D, rectarum scilicet E B ad B F, seu A B ad B H; imò K F ad F H, & D A ad A E. Pariterque in primo elemento,

cuius grauia F I A, & centrum K, recta I F ad I G componitur ex rationibus ponderum G ad K ad F, rectarum videlicet K A ad A G, & F H ad H K; ergo prior ratio D I ad I G componitur ex rationibus rectarum K F ad F H; D A ad A E; K A ad A G, & F H ad H K; vel ex iisdem perturbato ordine, nimirum ex rationibus K F ad F H ad H K; K A ad A G, & D A ad A E, vel A G ad K A. Quare D I ad I G erit vt K F ad H K, nempe in eadem ratione in qua fuit B I ad I H; idcirco B D parallela erit eidem G H, quod &c.

PROP. VII. THEOR. VII.

Si tria triangula latera eomodo sint diuisa quo fuere latera trianguli elementi secundi, & iungantur diuisionum puncta tribus rectis lineis, quæ bifariam secentur, & ad earum sectiones ab angulis correspondentibus lineas deducamus, si hæ producantur se inuicem secabunt in eodem puncto, hoc autem punctum erit intra triangulum constans ex prioribus iunctis lineis.

SIT triangulum A B C, cuius latera ita diuisa sint in D F E, vt ratio C F ad F A fiat ex rationibus B E ad E A, & C D ad D B; iungantur verò F D, D E, E F, quæ secentur bifariam in K H G. Dico iam, si iungamus etiam lineas A G, C H, B K, in eodem puncto sibi omnes occurrere, & quidem intra triangulum D E F. *tab. 5. fig. 43.*

Nam C F ad F A componitur ex rationibus B E ad E A, & C D ad D B; itemque E K ad K D, ratio scilicet æqualitatis, componitur ex duabus rationibus æqualitatis F H ad H D, & E G ad G F: ergo si protrahantur tres lineæ A G, C H, B K, in idem simul punctum conuenient. Quod si quis neget hoc punctum intra triangulum E F D existere, erit necessariò in vna linearum B K, A G, C H; alioquin tres istæ lineæ non in eodem puncto sibi occurrerent; ponamus ergo illud esse primum in linea B K in I; adeout productæ lineæ A G, C H, cadant in I. Quoniam, iunctis K G, K H, spatium G K H F est parallelogrammum, secat autem linea A C ipsam G F, si producatur A C versus C, & K H versus H conuenient in M; eademque ratione protractæ K G, C A ad puncta E A conuenient in L. Demum iunctæ E L, D M, erunt hæc (ex antecedenti) parallelæ inter se; quare A E, C D non conuenient in B, quod est contra hypothesim; & ideo lineæ A G, C H *ex Theor. 5 huius. tab. 5. fig. 45.*

productæ non occurrent lineæ B K, nisi intra triangulum E F D: Idem concludetur de lineis A G, B K, occurrere videlicet non posse lineæ C H, nisi in eodem triangulo E F D: pariterque de lineis B K, C H, occurrere non posse lineæ A G, nisi intra idem triangulum; ergo, cùm (vt dictum est) sibi ipsis occurrere debeant, necesse est, vt punctum concursus intra triangulum E F D existat, quod &c.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si, vt supra, diuisa sint tria trianguli latera; duo autem diuisionum puncta vna recta linea iungantur, quæ secet aliam lineam ductam ab angulo eiusdem trianguli, non tamen ab eo, cui iuncta linea subtenditur; sic illa per hanc diuidetur, vt ipsius segmenta ex duabus rationibus componantur, quarum altera sit ex partibus intacti lateris, alia verò constat ex portionibus eius lineæ, quæ segmentum est alterius lateris inter diuisam lineam, ac angulum, cui subtenditur reliquum trianguli latus, intericctum.

tab. 5. fig. 46. SIT triangulum A C F, cuius tria latera A F, F C, C A, diuisa sint deinceps in G D B, itaut ratio A G ad G F componatur ex duabus rationibus C E ad E F, & A B ad B C, iuncta verò G D secet ductam A E in H; Dico quod E H ad H A componitur ex rationibus C B ad B A; & E D ad D C. Nam in figura primi elementi, cuius grauia A F D, & centrum H, ratio rectæ E H ad H A, ponderis nempe A ad E; componitur ex rationibus grauium A ad F ad E, rectarum videlicet F G ad G A, & D E ad F; sed ratio rectæ F G ad G A componitur (ex suppositione) ex rationibus C B ad B A, & F D ad D C; ergo prædicta ratio E H ad H A componetur ex rationibus C B ad B A; F D ad D C; & D E ad D F, vel ex ijsdem perturbatè sumptis C B ad B A; D E ad D F ad D C; hoc est, ex propositis rationibus C B ad B A, & D E ad D C, quod &c.

PROP. IX. PROB. I.

Proposito triangulo, ellipsim, vel quando possibile est, circulum eidem inscribere, ita vt ex tribus contactuum punctis duo quælibet sint data.

SIT triangulum A B C, & in eo data puncta F E, per quæ ducenda ellipsis debeat contingere lineas A B, C B. Ponatur problema, vt factum; sitq; ellipsis inscripta F E D, contingens reliquum latus A C in D. Cum igitur C D ad D A componatur ex rationibus geometricè datis F B ad F A, & C E ad E B, erit punctum D datum, quare si iungantur lineæ D F, F E, E D, & ipsæ datæ erunt. Similiterq; si bifariam diuidantur in punctis H I K, hæc item data erunt; atque adeo etiam iunctæ A H, B I, C K, quæ diametri erunt eiusdem ellipsis. Cumque in vnaquaque ipsarum, centrum dictæ ellipsis existat, atque sibi ipsis in vno, eodemque puncto G occurrant, erit hic occursus datus, atque adeò datum erit prædictum centrũ G. Lineæ igitur A G, B G, C G, erunt illæ, quæ ex centro sectionis dicuntur; quare si vna ipsarum protrahatur, nempe F G à puncto G, atque in productione notetur G L æqualis F G, erit punctum L datum, vnà cum F L diametro; Et quia punctum datum E in sectione ponitur, estque contingens B F positione habita; quæ igitur ab ipso puncto ducitur æquidistans ipsi B F, occurrens diametro F L in M, vt est E M, erit positione, & longitudine determinata, eritque ad eandem diametrum F L ordinatim applicata. Fiat iam vt F M data ad M E, ita M E ad aliam lineam Y, cui secetur æqualis M N perpendiculariter excitata à puncto dato M, ad F L positione habitam; ductaq; indeterminatè, ab F puncto dato, linea F O ipsi M N æquidistante, iungatur L N, & producatur donec occurrat F O in O. Hoc posito datum erit punctum O; rectangulum verò F M N erit æquale quadrato applicatæ M E, quod rectangulum adiacet lineæ F O, latitudinemque habet ipsam F M inter applicatã E M, & tactum F interiectam, & deficit figura simili, & similiter posita ei, quæ diametro F L, & linea F O continetur; quamobrem diameter F L erit transuersum figuræ latus, & F O rectum. Si igitur datis duabus rectis lineis terminatis F O, F L, ad rectos inter se angulos, inueniamus ellipsim circa diametrum F L, ita vt vertex sit punctum F ad rectum angulum, & ordinatim applicatæ in angulo B F L possint, vt M E, rectangula adiacentia ipsi F O, quæ latitudinem habeant lineam inter verticem F sectionis, & applicatas ipsas interiectam, deficiantque figura simili, & similiter posita ei, quæ lineis F O, F L, continetur; ellipsis hæc continget lineam B A in F, & transibit per punctum E. Dico insuper quod huiusmodi ellipsis ita transibit per E, vt non

tab. 5. fig. 44.

ex lem. 1.

29. l. 2. conic.

Prop. 54. lib. 1. Con.

fecet,

secet, sed tangat B C, & A C, atque adeò problemati satisfactum esse.

Hæc autem fient conspicua duobus lemmatibus, iisdem retentis literis, ac suppositione.

LEMMA IV.

tab. 6. fig. 47. SI ellipsis F E D transiens per punctum E non contingit lineam B C, contingat si possibile est aliam lineam B K, & iungantur F K, K E. Quoniam igitur F B contingit sectionem in F, diameter
30. secundi conic. B G secabit bifariam in L lineam F K, quæ iungit contactus F K, eritque F L æqualis L K; sed etiam F I ex suppositione est æqualis
2. sexti. I E; ergo linea E K parallela erit diametro B G, ideoque non conuenient. At quia D C ad D A componitur ex rationibus B F ad F A, & C E ad E B, suntque F D, F E, E D, bifariam sectæ in N I K,
7. huius iunctæ A N, B I, C K, se inuicem secabunt in eodem puncto, intra
ex conuersa 25. primi conic. triangulum F E D; & propterea punctum G infra lineam F E existet; sed est etiam infra F K, quia duæ tangentes B F, B K, conueniunt, ergo linea K E non erit parallela diametro B G, quod fieri
23. primi con. non potest; ellipsis ergo D F E tanget lineam B E C in puncto E.

LEMMA V.

tab. 6. fig. 48. & 49. SI ellipsis, cuius centrum G contingens duas B F A, B E C rectas lineas in E F, non tangit etiam A D C in D, esto linea sectionem tangens A R O, & quia O R ad R A componitur ex rationibus B F ad F A, & O B ad E B, constat punctum contactus esse in R; itaque cum A F, A R tangant ellipsim, diameter A G bifariam diuidet F R, quæ iungit contactus; sed etiam F D secta fuit bifariam ex suppositione in N; ergo R E parallela erit diametro A G, quare etiam F L ab ipsa diametro secabitur bifariam in centro G (erit enim ex 2. l. 6., vt F N ad N D, ita F G ad G L;) & ideo linea G F, hoc est G P æqualis erit ipsi G L, totum parti, quod est absurdum, est enim punctum L intra ellipsim, & ideo intra lineam G P.

PROP.

PROP. X. THEOR. IX.

Si lineæ rectæ parabolam contingentes inter se conueniant, quæ per contactum interceptæ tangentis, & concursum duarum reliquarum ducitur linea, sic illam, quæ iungit reliquos contactus, secabit, vt eius segmenta inter se rationem eandem obtineant, quam quadrata partium homologè sumptarum vnius tangentis.

SIT parabola A E C, quam contingant tres lineæ A F G, F E D, G D C, in punctis A E C; inde iungatur G E, & producatur, vt secet A C in puncto B; dico A B ad B C esse vt quadratum ex F E ad quadratum ex D E. Quoniam propter elementum tertium, cuius vertex G, & centrum E, ratio rectæ A B ad B C, ponderis nempe C ad A, componitur ex rationibus grauium C ad D ad F ad A, rectarum scilicet D G ad G C, F E ad E D, & G A ad G F: est autem vt D G ad G C, ita A F ad G A; erit A B ad B C composita ex rationibus A F ad G A; F E ad E D; & G A ad G F; & ex eisdem perturbatè acceptis, hoc est ex rationibus F E ad E D, A F ad G A ad G F; imò ex ipsis F E ad E D, & A F ad G F, vel ex duplicata ratione F E ad E D; est igitur A B ad B C, vt quadratum ex F E, ad quadratum ex D E, quod &c. *tab. 6. fig. 50.* *41. tertij conic.* *ibidem.*

PROP. XI. THEOR. X.

Iisdem manentibus iungantur A D, C F, secantes sese in H; dico punctum H esse in linea G E B.

NAM si possibile est, vt H sit extra lineam G E B, producta G H, non cadet in B; sed in aliud punctum I; itaque propter elementum secundum, in quo H est centrum ponderum D F I, & grauia suspensa sunt A G C, erit recta A I ad I C, hoc est graue C ad A compositum ex rationibus grauium C ad G ad A, rectarum scilicet G D ad D C, & A F ad F G: Verum vt A F ad F G, itemq; vt G D ad D C, ita F E ad E D; ergo A I ad I C, erit vt quadratum ex F E ad quadratum ex E D. Sed in eadem quadratorum ratione est etiam A B ad B C; ergo vt A I ad I C, ita A B ad B C, *tab. 6. fig. 50.*

&

& componendo, vt A C ad I C, ita A C ad C B, & ideo I C æqualis eſt C B, totum videlicet parti, quod eſt abſurdum; cadet igitur G H in B, & propterea H erit in linea G E B, quod &c.

PROP. XII. THEOR. XI.

Si linea contingens parabolam ſecet duas alias contingentes, hæc autem ſectionum puncta, & contactus earundem tangentium, duabus ſe inuicem ſecantibus lineis coniungantur; cubi ex portionibus prioris contingentis inter parabolam, & duas reliquas contingentes interiectis, erunt inter ſeſe vt triangula homologè ſumpta, quorum baſes ſunt reliquæ contingentes, vertices verò idem punctum, in quo dictæ iunctæ lineæ ſe inuicem ſecuerunt.

RElcta F D contingat parabolam A E C in E, ſecet autem duas contingentes F A, D C in F, & D; indè iungantur A D, F C, quæ ſe inuicem ſecent in H; dico cubum ex F E ad cubum ex E D eſſe in eadem ratione, in qua eſt triangulum F A H, cuius baſis contingens A F, ad triangulum D H C, cuius baſis altera contingens D C; Iungantur A C, E H, & productæ tangentes A F, C D, conueniant in G; vtrinque verò protracta E H, ſecet A C in B, quæ ex alia parte tranſibit per G. Quoniam in elemento quarto, in quo H eſt centrum ponderum E B, grauium nimirum F A C D, recta A B ad B C, pondus nimirum C ad A componitur ex rationibus grauium C ad F ad D ad A, rectarum videlicet F H ad H C, E D ad E F, & A H ad H D, ſeu ex iiſdem perturbatè ſumptis, hoc eſt ex rationibus F H ad H C, A H ad H D, & D E ad E F; eadem verò A B ad B C componitur ex duplicata ratione ipſius F E ad E D; ſeu ex triplicata eiuſdem rationis F E ad E D, vnà cum ratione conuerſa ipſius D E ad E F; ſi igitur vtrinque dematur ratio D E ad E F, ſupererit tripla F E ad E D, hoc eſt cubus ex F E ad cubum ex E D, compoſitus ex rationibus F H ad H C, & A H ad H D, ex quibus rationibus cum item componatur triangulum F H A ad D H C, patet cubum ex F E, ad cubum ex E D, eſſe vt triangulum F H A ad triangulum D H C, quod &c.

SCHOLIVM.

Illud etiam ſciendum eſt, quod ſi in elemento ſecundo, cuius centrum H, & grauia ſuſpenſa ſunt G A C, duæ tantum rationes

cognoscantur ex illis sex, de quibus iam egimus, præcipuè in problemate septimo primi libri, reliquas quatuor non solum dabimus, verùm etiam omnes alias in superiori figura conspicuas, & hoc quidem ex sexto, septimo, nono, & decimo probl. lib. 1.

PROP. XIII. PROBL. II.

Hyperbolam, ellipsim, & circulum quadam linea contingat, & per contactum ducta sectionis diametro, hanc vna cum tangente tangens alia secet, & sit data partium ratio postremæ tangentis: oportet alteram manifestare, quæ fit ex portionibus ductæ diametri.

ESto C centrum conisectionis AB, quam contingat linea AD in A, & iuncta CA producatur extra sectionem, vt simul cum tangente AD secetur ab alia contingente ducta ex B, hoc est CA producta in E, & AD in D. Dico quod si manifesta fuerit ratio BD ad DE, etiam CA ad AE manifesta erit. Iungatur CB, quæ producta occurrat rectæ AD in puncto F. Itaque constructa erit figura elementi primi, cuius centrum D, & vertex C; & quia, ex conicis, triangulum EDA æquale est triangulo BDF, erit DB ad DE, vt DA ad DF; est autem data ratio BD ad DE; ergo & ipsa AD ad DF dabitur; datis verò duabus rationibus DB ad DE, & AD ad DF, manifestabimus quoque duas reliquas, & propterea dabitur CA ad AE, quod &c. *tab. 6. fig. 51. & 52.* *1. 3. conic.* *14. 6. Euc.*

PROP. XIV. THEOR. XII.

Si duæ lineæ circulum, vel ellipsim contingentes productæ conueniant, & ab alio in sectione assumpto puncto ducatur tangens alia, priores duas diuidens, quarum contactus, ac diuisionum puncta duabus se inuicem secantibus lineis coniungantur; inde à puncto sectionis ad priorum tangentium occursus linea ducatur, hæc producta (cum opus sit) transibit per reliquum contactum, adeout figura inde resultans resoluatur saltem in duas figuras primi elementi.

SIT ellipsis, vel circuli circumferentia ABC, quam contingant duæ lineæ AF, CD, quæ productæ conueniant in E; *tab. 6. fig. 52. & 54.*

ducta insuper alia contingente F B D secante tangentem A E in F, atque C E in D, iungantur duæ lineæ A D, C F diuidentes sese in G. Iam acta E G, & producta (cum opus sit) dico illam transire per reliquum contactum B.

Nam si tres tangentes constituant triangulum circa ellipsim, vel circulum circumscriptum propositum, iam ostendimus in prima propositione 2. huius. Quod si cõtingens F B D secuerit duas alias A F E, C D E inter earum contactus A C, & occursum E, hoc etiam per reductionem ad id quod fieri nequit ostendemus. Non transeat enim (si fieri potest) iuncta E G per contactum B; sed transeat per N; ducta autem alia contingente K I L, quæ vtrinque producta, vnà cum duabus E A K, E C L, constituat triangulum E K L, circulum, vel ellipsim contingens in punctis A I C, iungantur A L, K C, quæ se inuicem secent in M. Cum igitur E N G sit vnica recta linea, duæ figuræ E D C G F N, E F A G D N spectabunt ad primum elementum; & ideo recta F N ad F D, hoc est pondus D ad N componetur ex rationibus grauium D ad E ad N, rectarum videlicet C E ad C D, & G N ad G E; itemque in alia elementi primi figura recta F D ad N D, pondus nempe N ad F; duæ nimirum rationes ponderum N ad E ad F fient ex rationibus rectarum G E ad G N, & A F ad A E: idcircò duæ rationes F N ad F D ad N D, hoc est F N ad N D, componetur ex rationibus C E ad C D, G N ad G E ad G N, & A F ad A E, hoc est ex rationibus C E ad C D, & A F ad A E.

1. 2. *huius*. Insuper K I ad I L componitur ex rationibus E C ad C L, & K A ad A E; eademque ratio componitur etiam ex rationibus D C ad C L, F B ad B D, & K A ad A F; sed E C ad C L componitur ex duabus E C ad D C ad C L; pariterque K A ad A E componitur ex rationibus K A ad A F, & A F ad A E; ergo composita ex rationibus E C ad D C ad C L, K A ad A F ad A E, erit illa quæ componitur ex rationibus D C ad C L, F B ad B D, & K A ad A F; ablatis igitur vtrinque rationibus D C ad C L, & K A ad A F, erit reliqua F B ad B D composita ex rationibus E C ad D C, & A F ad A E. Sed, vt ostendimus, etiam F N ad N D ex ijsdem rationibus componitur; ergò vt F N ad N D, ita F B ad B D, & compõendo, F D ad N D, erit vt eadem F D ad B D, & ideo N D æqualis erit ipsi B D, totum parti, quod est absurdum, transibit igitur E N G per contactum B, quod &c.

CO-

COROLLARIVM.

Constat tùm in ellipsi, tùm in circulo esse F B ad B D, vt est composita ex C E ad C D, & A F ad A E. tab. 7. fig. 55. & 56.

PROP. XV. THEOR. XIII.

Si duæ tangentes circulum, inter se conueniant, quas secet tangens alia inter earum occursum, & contactus; rectangula ex prioribus tangentibus ad occursum vsque acceptis, & portionibus inter earum contactus, atque alteram tangentem interiectis, constantia; erunt inter sese, vt sunt portiones modò dictæ tangentis, adeout homologa sint contermina.

SIT circulus A B C, quem contingant A E, C E in punctis A C, & ducatur alia F B D, quæ circulum tangat in B; secet verò A E in F, & C E in D. Dico F B ad B D esse vt rectangulum E A F ad rectangulum E C D. tab. 7. fig. 56.

Iam ex antecedenti corollario ratio F B ad B D componitur ex rationibus rectarum C E, siue E A ad C D, & A F ad A E, vel E C; quare F B ad B D erit vt composita ex A E ad C D, & A F ad C E, siue vt rectangulum E A F ad rectangulum E C D, quod &c.

PROP. XVI. THEOR. XIV.

Si ab angulis trianguli ad opposita vsque latera tres rectæ lineæ bifariam angulos secantes ductæ sint, in eodem puncto se mutuò diuident; figura verò ex his lineis constans erit illa secundi elementi.

SIT triangulum A I E, & ab angulis I A E bifariam diuisis, ducantur lineæ I C, A G, E N occurrentes oppositis lateribus in C G N: dico has lineas in eodem puncto B secari, hoc est E C ad C A componi ex rationibus I N ad N A, & E G ad G I; & ideo figuram ex his lineis compositam spectare ad secundum elementum. Nam ratio E C ad C A, hoc est E I ad I A (propter angulum I bifariam sectum) componitur ex rationibus I E ad E A ad A I; tab. 1. fig. 5.

vtque I F ad E A, ita I N ad N A; & vt E A ad AI, ita E G ad G I; ergo E C ad C A componitur ex rationibus I N ad N A, & E G ad G I, quod &c.

LEMMA VI.

Datis duobus circulis lineam vtrumque contingentem ducere.

tab.7. fig.58. SInt duo circuli, quorum centra K I, oportet lineam ducere, quæ vtrumque contingat. Ponatur iam factum esse problema, & linea contingens sit A F; iungamus A K, K I, I F: & quia in primo casu, cum duo circuli sint æquales, etiam K A, I F sunt æquales, & æquidistantes inter se, cum vnaquæque illarum eidem A F perpendicularis sit, erit spatium K A F I parallelogrammum rectangulum, & ideò A F contingens æquidistans erit rectæ K I; cum igitur duo puncta K I data sint, erit quoque positione data linea K I, pariterque ad ipsam perpendicularis K A: quare datum est punctum A, à quo si ducatur linea æquidistans ipsi K I cadet hæc in lineam A F, & dabitur contingens A F, quod &c.

tab.7. fig.60. & 61. Sint deinde, vt in duobus reliquis casibus, circuli inæquales, & producta K I in tertia figura conueniat in L cum contingente A F pariter producta ad partes circuli minoris, quemadmodum in eodem puncto L contingens A F in secunda figura occurrit eidem K I. Quoniam vtraque ipsarum K A, I F perpendicularis est ad A F, erunt inter se æquidistantes, & propterea vt K A ad I F, ita K L ad L I; componendo autem in secunda figura, & in tertia diuidendo, erit K I ad I L, vt cõpositum ex duabus K A, F I in secunda figura, sed vt earum differentia in tertia, ad eandem H I. Itaque cum tam ratio compositi, quam differentiæ duorum prædictorum radiorum ad radium minorem data sit; & item data sit longitudine, ac positione antecedens K I, dabitur quoque consequens I L, & punctum L; quare cum ab eodem puncto L ducere possimus vnicam tantum lineam contingentem I F, & vnicam alteram tangentem circulum K A, necesse est vt istæ cadant in contingentes F L, L A, seu A F L, quam à principio posuimus tangentem duos circulos. Compositio problematis manifesta est.

PROP.

PROP. XVII. THEOR. XV.

Si triangulum tres circulos comprehendat, cuius singula latera duos ex suppositis circulis contingant; ab vnoquoque verò angulo ad centrum sibi proximioris circuli lineæ ducantur: istæ si vlterius producantur, sibi inuicem in idem punctū occurrent.

SInt tres circuli, quorum centra C A B, & triangulum ipsos comprehendens sit L E H, tangatque illos in punctis M D F G I K; dico, si iungantur tres lineæ H A, E C, L B, & producantur, in idem punctum sibi ipsis occurrere. Iungantur lineæ D F, M K, G I, secantes lineas E C, L B, H O, in punctis P Q N. Quoniam contingentes D E, E F, & D P, P F sunt inter se æquales; latus autem E P commune est vtrique triangulo D P E, F P E; erunt huiusmodi triangula inter se æqualia, propterea que angulus D E P æqualis erit angulo F E P; cumque eadem ratione anguli M L Q, Q L K, sint etiam æquales, itemque anguli I H N, G H N; constat tres lineas E C, H A, L B, sibi ipsis occurrere si producantur, quod &c.

tab. 8. fig. 62.

36. tertij. Conic. lib. 2. prop. 30.

16. 2 huius.

PROP. XVIII. THEOR. XVI.

Duos circulos A F, D C, contingant duæ rectæ A C, & F D, quarum F D priori occurrat in B; iunctis verò lineis A F, D C, producatur D C, adeout occurrat ipsi A F, in E, dico rectangulum D E A æquale esse rectangulo C E F.

QVoniam F E ad E A, pondus videlicet A ad F, in figura elementi primi, cuius grauia F A C, & centrum D, componitur ex rationibus grauium A ad C ad D ad F, rectarum nimirum C B ad B A, D E ad E C, & F B ad B D; vtque C B ad B A, ita B D ad F B; erit E F ad E A composita ex rationibus B D ad F B, D E ad E C, & F B ad B D, vel ex ijsdem perturbatè acceptis, nempe ex rationibus B D ad F B ad B D, & D E ad E C; hoc est E F ad E A erit vt D E ad E C: rectangulum igitur contentum lineis extremis E F, E C, æquale erit ei quod fit à medijs quatuor illarum proportionalium, ergo &c.

tab. 7. fig. 59.

PROP. XIX. PROB. III.

Sint inter se duo sic aptata triangula, vt reciprocè vertex vnius desinat in alterius basim, atque adeò eorum latera se inuicem secent: distinguemus in huiusmodi figura sex rectarum rationes, ex quibus, datis quatuor quibuslibet, sit nobis propositum duas reliquas inuestigare.

tab. 8. *fig.* 63. HVius problematis sunt quindecim casus; totidem sunt enim numeri binarij combinabiles in senario.

I. Sint notæ quatuor rationes G E ad E F; A B ad B C; A H ad H E; & B D ad D F: Sintque indagandæ duæ reliquæ G H ad H B, & F D ad D B. Iungantur duæ rectæ H D, B E, se inuicem secantes in I. Quoniam in elemento tertio, cuius centrum I, & grauia A; H-A; D-C; C, sunt datæ tres rationes A H ad H E; E D ad D C; & A B ad B C; dabimus quoque reliquas duas rationes (ex nono probl. primi huius) H I ad I D, & B I ad I E; quare cum in figura eiusdem elementi, cuius centrum I, grauia verò G; H-G; D-F; F, datæ sint tres rationes G E ad E F; H I ad I D, & E I ad I B; manifestabimus (ex eodem probl.) etiam reliquas duas rationes G H ad H B, & F D ad D B.

II. Aperiendæ sint duæ rationes A H ad H E, & E D ad D C, notis reliquis; erit hic casus similis priori.

tab. 8. *fig.* 64. III. Rationes, quas debemus patefacere sint duæ A B ad B C; G E ad E F, habitis quatuor reliquis (caue tamen in hoc casu ne A C, G F sint parallelæ) Producantur A C, G F, quæ conuenient in I. Cum igitur A B ad B C componatur ex rationibus A B ad B I, & B I ad B C; item G E ad E F componatur ex rationibus G E ad E I ad E F; & in elemento primo, cuius grauia A I G, & centrum H, datæ sint duæ rationes G H ad H B, & E H ad H A; & pariter in alia figura eiusdem elementi, cuius grauia B I E, & eorum centrum D, datæ sint duæ rationes E D ad D C, & F D ad D B; aperiemus in prima figura reliquas duas A B ad B I; G E ad E I; atque in secunda figura duas reliquas B I ad B C; & E I ad E F; datæ sunt igitur rationes A B ad B I ad B C, hoc est A B ad B C; itemq; rationes G E ad E I ad E F, hoc est G E ad E F, quod erat propositum.

IV.

IV. Debeamus modo manifestare duas rationes ED ad DC, atque FD ad DB, suppositis reliquis quatuor. Si duæ AC, GF, sint parallelæ iam patet propositum; si verò non sint producamus illas vt prius, adeout conueniant in I; & quia in elemento primo, cuius grauia AIG, & centrum H, dantur duæ rationes AH ad HE, GH ad HB, manifestabimus (ex 6. probl. l. p.) duas reliquas AB ad BI, & GE ad EI; sunt autem datæ rationes AB ad BC, & GE ad EF; ergo ablatis notis rationibus AB ad BI, videlicet AB ad BC, & GE ad EI, à prædicta GE ad EF; erunt reliquæ rationes BI ad BC, atque IE ad EF notæ: quare his duabus datis rationibus in primo elemento, cuius grauia BIE, & centrum D, palam fient reliquæ duæ BD ad DF, & DE ad DC, quod erat propositũ.

V. Quod si inuestigandæ rationes sint AH ad HE, & BH ad HG, consimili ferè ratiocinio absoluemus problema; datis enim duabus BD ad DF, ED ad DC in elemento primo, cuius grauia BIE, & centrum D, fiunt notæ duæ reliquę BC ad BI, & EF ad EI; cumque supponantur datæ etiam CB ad BA, & FE ad EG, dabuntur etiam duæ reliquæ IB ab BA, IE ad EG. Itaque quoniam in primo elemento, cuius grauia AIC, centrumque H, notæ sunt duæ rationes IB ad BA, & IE ad EG, reliquas item duas manifestabimus AH ad HE, & GH ad HB.

VI. Sint aperiendæ duæ rationes AH ad HE, & GE ad EF, habitis reliquis. Si AC, GF fuerint parallelæ, constat AH ad HE esse in eadem ratione, in qua BH ad HG, & ideo datam esse. Deinde quia GE ad EF componitur ex rationibus GE ad AB, AB ad BC, & BC ad EF; vt autem GE ad AB, ita data GH ad HB; AB verò ad BC est data, & vt BC ad EF, ita data CD ad DE; ergo etiam EF ad EG, quæ componitur ex datis rationibus, erit data.

Quod si AC, GF parallelæ non sint, conueniant productæ in I; & quia in elemento primo, cuius grauia BIE, & centrum D, sunt datæ duæ rationes BD ad DF, & ED ad DC; reliquas quoque CB ad BI, & EI ad FE notas reddemus; & ideo cum ratio nota CB ad BA componatur ex rationibus CB ad BI, quæ nota est, & IB ad BA; hæc etiam data erit; ideoque cum in elemento primo, cuius grauia AIG, & centrum H, datæ sint duæ rationes IB ad BA, & BH ad HG, reliquas etiam AH ad HE, & GE ad EI notas exhibebimus: quare cum GE ad EF componatur ex datis ratio-

nibus

nibus G E ad E I ad E F; erit quoque ipsa manifesta.

VII. Duas rationes G H ad H B, & A B ad B C manifestabimus eodem modo; nam casus est similis antecedenti.

VIII. Sint agnoscendæ rationes G E ad E F, & G H ad H B, habitis reliquis quatuor. Datis duabus rationibus E D ad D C, & F D ad D B elucescunt B I ad B C, & E I ad E F; composita verò ex rationibus A B ad B I ad B C, est A B ad B C, quæ est data; ergo reliqua A B ad B I data erit; atque adeò in elemento primo, cuius grauia A I G, & centrum H, cum datæ sint duæ rationes A H ad H E, & A B ad B I; duas item reliquas dabimus G H ad H B, & G E ad E I; componitur autem ratio G E ad E F ex rationibus G E ad E I, & E I ad I F, quæ datæ sunt, ergo etiam illa elucebit. Quod si parallelæ sint A C, G F, eodem ratiocinio vtemur, quo vsi sumus in sexto casu.

IX. Quod si inuestigandæ rationes sint A H ad H E, & A B ad B C, erit hic casus similis priori.

X. Sint duæ rationes indagandæ G E ad E F, & E D ad D C, reliquis præcognitis. Si A C, G F sint parallelæ, propositum ostendemus, vt in casu sexto; at si parallelæ non fuerint G E, E F, productæ conuenient in I; quare cum duæ rationes sint datæ G H ad H B, A H ad H E, etiam reliquas duas cognoscemus, nempe A B ad B I, & G E ad E I; componitur verò ratio data A B ad B C ex rationibus A B ad B I data, & B I ad B C; ergo & ista, quæ reliqua est elucebit; propterea datis duabus rationibus B I ad B C, & B D ad D F in figura primi elementi, cuius grauia B I E, & centrum D, manifestabimus quoque duas reliquas E D ad D C, & E I ad E F; quamobrem sunt datæ duæ rationes G E ad E I, & E I ad E F; sed ex his componitur ratio G E ad E F; ergo etiam ipsa non latebit.

XI. At si rationes, quas manifestare debemus fuerint A B ad B C, & B D ad D F, hanc partem problematis superiori dicto modo monstrabimus.

XII. Oporteat modò indagare duas rationes A B ad B C, & C D ad D E; & siquidem A C, G F parallelæ sint eadem vtemur ratione, qua in sexto casu vsi sumus; si verò non sint, conueniant productæ C A, F G in I. Datis duabus rationibus G H ad H B, A H ad H E, dabimus reliquas duas A B ad B I, & G E ad E I; & datis duabus G E ad E F, G E ad E I, notificabimus reliquam E I ad E F; quare habitis duabus E I ad E F, & B D ad D F, cognoscemus item duas

duas CD ad DE, & BI ad BC; habitisq; duabus AB ad BI ad BC, ex quibus fit ratio AB ad BC, hæc similiter dabitur.

XIII. Quod si notificandæ sint duæ rationes GE ad EF, & FD ad DB erit hic casus similis priori.

XIV. Si velimus indagare duas rationes AH ad HE, & BD ad DF pręcognitis reliquis, iungatur GC secans duas HE, BD in IK. Itaque quia in figura primi elementi, cuius grauia ACG, & centrum H manifestæ sunt duæ rationes AB ad BC, & GH ad HB; erunt notæ reliquæ duæ AH ad AI, & IC ad CG; pariterque cum in alia figura primi elementi, cuius grauia CGF, eorumque centrum D habitæ sint duæ rationes ED ad DC, & GE ad EF, fient conspicuæ etiam duæ reliquæ DF ad DK, & GC ad CK; quare IC ad KC (composita videlicet ex duabus IC ad CG ad CK datis) cognoscetur; ideoque in elemento tertio, cuius grauia A; B-A; D-E; E, & centrum K, datis tribus rationibus AB ad BC, IC ad KC, & ED ad DC, dabuntur etiam duæ reliquæ AI ad AE, & DK ad DB, modò tamen AE, BD parallelæ non sint; idcircò datæ sunt rationes AH ad AI ad AE; & DF ad DK ad DB, hoc est duæ rationes AH ad AE, & DF ad DB: at si æquidistantes fuerint BD, AE; minimè verò AC, GF, problema erit impossibile; quod, vt constet ducamus à puncto E lineam EL, quę secet DF in L, & producta per E, secetur à recta EK, adeò vt LE ad EK sit vt FE ad EG, & iungatur BK secans AE in I. Erit igitur propter parallelas BF, AE, vt BH ad HG, ita BI ad IK; & vt FE ad EG, ita LE ad EK; rationes verò AB ad BC, & CD ad DE sunt ipsæ suppositæ; ergo si casus possibilis esset, deberet ratio AH ad HE esse eadem ac AI ad IE; item vt BD ad DF, ita oporteret esse BD ad DL, quod cum non sit, nihil certi potest determinari. *tab. 8. fig. 65.* *tab. 8. fig. 66.*

XV. & vltimo. Si rationes manifestandæ sint BH ad HG, & CD ad DE; cauendum est vt supra ne sint æquidistantes BG, CE quando duæ AC, GF non sunt parallelæ inter se; est autem hic casus similis superiori, itaque constat totum propositum.



PROP. XX. THEOR. XVII.

Si ab extremo cuiusdam rectæ ad terminos alterius priori æquidistantis duas agamus lineas; inde ab altero extremo primæ parallelæ alia ducatur recta secans inter æquidistantes duas priores lineas: ratio parallelarum componetur ex duabus rationibus, quarum altera fit ex portionibus secantis lineæ; alia verò ex segmento, & tota recta inter æquidistantes interiecta, & in quam ipsa secans linea desinit, adeout omnia homologa contermina sint.

tab. 8. fig. 67. SInt duæ æquidistantes lineæ D C, E K, & ab eodem termino D ducamus duas lineas ad terminos alterius æquidistantis, quæ sint D K, D E; insuper ab alio termino C ducatur alia recta C I B secans D K in I, & D E in B. Dico rationem ex D C ad E K componi ex duabus rationibus C I ad I B, & B D ad D E. Quoniam, B C secat D C vnam parallelarum, si producatur, alteri etiam K E protractæ occurret in A. Quoniam igitur D C ad E K componitur ex rationibus rectarum D C ad A E ad E K; vt autem D C ad A E, ita D B ad B E propter parallelas; erit D C ad E K composita ex rationibus D B ad B E, & A E ad E K. Verùm in primo elemento, cuius grauia A K D, & centrum B ratio rectæ A E ad E K, ponderum videlicet K ad A componitur ex rationibus grauium K ad I ad A; rectarum nimirum D I ad D K, & A B ad B I, hoc est rectarum I C ad C A, & A B ad B I; Ergo ratio D C ad E K componetur ex rationibus D B ad B E; I C ad C A; & A B ad B I: Cumque I C ad C A fiat ex rationibus I C ad C B ad C A; vtque C B ad C A, ita sit D B ad D E; erit D C ad E K composita ex rationibus D B ad B E; I C ad C B; B D ad D E; & A B ad B I. Verùm A B ad B I componitur ex rationibus A B ad B C, & B C ad B I; est autem A B ad B C, vt E B ad B D; ergo prædicta ratio D C ad E K componetur ex rationibus D B ad B E; I C ad C B; B D ad D E; E B ad B D, & B C ad B I; vel ex iisdem perturbatè sumptis, hoc est ex D B ad B E ad B D ad D E; I C ad C B ad B I; imò ex duabus B D ad D E; & I C ad B I, quod &c.

COROLLARIVM.

Manifestum est, quod datis duabus rationibus B D ad D E; & I C ad B I; datur etiam ratio D C ad E K ex iisdem composita.

PROP.

PROP. XXI. THEOR. XVIII.

Iisdem suppositis, ac constructis; fiat insuper NO ad OP composita ex rationibus BE ad ED, & CI ad IB. Dico DI ad IK componi ex rationibus DB ad BE, & NO ad NP.

Componitur AE ad EK ex rationibus AE ad DC ad EK; vtque AE ad DC, ita EB ad BD; & DC ad EK componitur (ex antecedenti) ex rationibus BD ad DE; & CI ad IB; ergo AE ad EK componitur ex rationibus EB ad BD ad DE; & CI ad IB; imò ex rationibus EB ad DE; & CI ad IB; hoc est AE ad EK est vt NO ad OP; componendo autem, deinde per conuersionem rationis, & conuertendo, erit EA ad AK, vt ON ad NP; At in elemento primo, cuius grauia AKD, & centrum B, recta DI ad IK, hoc est pondus K ad D componitur ex rationibus grauium K ad E ad D, rectarum videlicet EA ad AK, & DB ad BE; vel ex NO ad NP; & DB ad BE; ergo constat propositum. *tab.8. fig. 67.*

COROLLARIVM.

Patet quod datis duabus rationibus DB ad BE, & CI ad IB manifestabimus quoque rationem DI ad IK.

SCHOLIVM.

Hinc cuique fas erit instrumentum elaborare, cuius beneficio, radiorum visualium interualla metiatur, nulla præcognita distantia, aut iteratis stationibus, vt consuetum est. *tab.10. fig.85.*

Circa DE sint duæ regulæ parallelæ, EL immobilis circa E, BM verò mobilis circa D tanquam centrum, & ex puncto C sit ducta alia linea immobilis, quæ secet vbilibet lineam DE, dummodo punctum sectionis sit inter extrema DE, cuiusmodi est linea CB. Propositum igitur sit obiectum K. *Nouum instrumentũ pro distantijs metiendis.*

Posito oculo in E attollatur, vel deprimatur instrumentum donec linea visualis sit in directum cum regula EL, quod continget quando per pinnacidia EL videbimus obiectum K, tum verò figatur, & confirmetur in eo situ instrumentum, ne possit in

partem vllam moueri, & ponatur oculus in D, & moueatur regula D M circa centrum D, donec intueamur per pinnacidia D M idem punctum K per lineam visualem D K, quibus obseruatis notetur diligenter pũctum I, sectio videlicet linearum B C, D M.

His positis, quia duæ rationes B D ad D E, & I C ad B I, saltem proximè haberi possunt secundùm numeros, dabitur etiam eodem pacto, quæ ex ijsdem componitur, ratio videlicet D C ad E K (ex 20. propositione 2. huius) atq; adeò intelligemus quoties D C continеatur in E K, quæ quidem est interuallum visualis E K ab oculo ad obiectum; sed eadem ratione (ex 21. propositione 2. huius) sciemus quoties D I metietur ipsam D K visualem alteram ab oculo ad obiectum: ergo &c.

HÆC à me paucis perstricta, quam latè pateant, vides, benigne lector. Nullæ enim sunt adeo implexæ rectarum sibi inuicem occurrentium ambages, quæ in nostra elementa non resoluantur; modò lineæ ea lege se inuicem secent, vt sectione qualibet mutata, cæteras omnes variari necesse sit. Hinc datis duabus, aut tribus rationibus continget sæpe innumeras alias patefieri; quod vnusquisque in elemento secundo experiri potest, in quo, iunctis D B, B K, K D, ex 51. rationibus, datis duabus quibuslibet inueniet alias 49.

tab. 1. fig. 5.

FINIS CONSTRVCTIONIS STATICÆ.





Visum est appendicis loco adijcere his problematibus theoremata quædam, partim antiquis geometriæ legibus, partim Caualleriana methodo à me soluta, quamuis ex superius dictis minimè pendeant. Cum enim in circulo inutiliter quadrando, hæc omnia non inutiliter sint inuenta, par erat, vt in eodem volumine luce publica fruerentur, quamuis opportunius suis in tenebris latuissent.

APPENDIX GEOMETRICA.

PROP. I. THEOR. I.

In quolibet triangulo rectangulo Scaleno Hypothenusæ potestas ad eam maioris lateris, minorem; sed harum linearum potentiæ seorsim sumptæ ad eam minoris lateris maiorem proportionem habent, quam ex oppositis angulus ad angulum.



IT triangulum A B C rectangulum in B, cuius Hypothenusa A C, maiusque latus B A. Dico prius A C ad A B potestate minorem habere proportionem, quam habeat angulus A B C rectus ad angulum B C A. Secetur A C bifariam in E, centroque E, ac interuallo E A, vel E C semicirculus A B C describatur, cuius quidem peripheria etiam per B punctum transibit (est enim angulus ad B rectus) deindè quia latus A B maius est latere B C, erit quoque arcus A B maior arcu B C; atque adeò semicirculi peripheria A B C non erit in B puncto bifariam secta; seceturergo, & punctum sectionis sit D; quod quidem intra A, & B cadet; iunctis verò lineis D A, D I E, D C, D B, B C, B E, excitētur insuper à punctis B D perpendiculares B G, D E ad A C diametrum, & linea D H secet bifariam angulum A D B; tandem, quia angulus A D C duplus est anguli A D E, hoc est A D I (hoc enim facilè deduci potest), itemq; angulus A D B duplus anguli A D H; erit permutando angulus A D C ad angulum A D B, sicut angulus A D I ad ipsum A D H; estq; angulus A D C minor angulo A D B; (hoc enim in minori circuli segmento existit) ergo angulus A D I minor erit ipso A D H, atque adeò punctum H intra puncta I, & B cadet. His itaque positis, quia in triangulo A D B angulus ad verticem bifariam est sectus à linea D H, erit vt recta A D ad D B, ita basis segmentum A H ad H B, sed A I ad H B, & multò magis ad I B minorem proportionem habet, quam recta A H ad H B, videlicet A D ad D B; recta verò A D ad D B habet etiam minorem pro-

tab. 8. fig. 68.

Almag. proportionem, quam arcus A D ad arcum D B; ergo recta A I ad I B minorem habebit proportionem, quam dictus arcus A D ad arcum D B; componendo autem, atque per conuersionem rationis, habebit recta A B ad A I, seu A G ad A E maiorem proportionem, quam habeat arcus A D B ad arcum A D, & consequentium dupla; est autem A C dupla ipsius A E; atque A D C peripheria dupla ipsius A D; ergo A G ad A C, videlicet quadratum A B ad quadratum A C maiorem habebit rationem, quam circumferentia A D B ad circumferentiam A D C, imò quàm angulus A E B ad duos rectos; & eorum semisses, nimirum A C B angulus ad angulum rectum A B C; sed inuertendo quadratum A C ad quadratum A B minorem habebit proportionem, quam angulus A B C ad angulum A C B.

II. Dico quadratum A C ad quadratum B C, hoc est lineam A C ad lineam B C potentia, maiorem habere proportionem, quam angulus A B C rectus ad angulum B A C. Quoniam enim recta A G ad A C maiorem habuit proportionem, quam circumferentia A D B ad circumferentiam A D C, habebit inuertendo recta A C ad A G minorem; sed per conuersionem rationis, recta A C ad C G maiorem habebit proportionem, quam circumferentia A D C ad B C; Verùm, vt recta A C ad C G, ita quadratum C A ad quadratum C B; & vt circumferentia A D C ad C B, ita duo anguli recti ad angulum B E C; vel eorum semisses, hoc est vnus rectus A B C ad angulum B A C; quadratum igitur A C ad quadratum C B maiorem habebit proportionem, quam angulus rectus A B C ad angulum B A C.

III. Demùm dico quadratum A B ad ipsum B C maiorem etiam proportionem habere, quam angulus B C A ad B A C: nam (vt proximè demonstratum est) recta A C ad C G maiorem habet proportionem, quam circumferentia A D C ad ipsam C B; habebit ergo A G ad G C diuidendo, hoc est quadratum A G ad ipsum C B; seu quadratum A B ad B C maiorem rationem, quam circumferentia A D B ad ipsam B C, nimirum quam A C B angulus ad angulum B E C, & eorum semisses; hoc est angulus A C B ad angulum B A C, quæ &c.

✠✠✠✠✠

PROP.

PROP. II. THEOR. II.

Si ex circuli centro ad eiusdem diametrum perpendicularis excitetur, & à puncto eius, quod simul est in peripheria, lineæ ad terminos eiusdem diametri perducantur, fiatque in opposito semicirculo arcus, cuius dictæ lineæ sint radij: Sumpto præterea & alio quolibet puncto, non autem circuli centro, in eadem perpendiculari; ab eo ad alterum diametri terminum recta ducatur, qua, ad partes dicti semicirculi oppositi, ceu radio, circularis linea sit ducta, vel ita secetur, vt ad eiusdem circuli semiperipheriam eandem habeat proportionem, quam quadratum radij suppositi circuli ad id eius rectæ lineæ, quam ab assumpto puncto deduximus; itemq; ab eodem linea deducatur ad alteram facti arcus extremitatem: Procreabitur ab his rectis quoddam rectilineum spatium, sed vnà cum duobus illis arcubus curuilineum aliud mixtum, quod priori æquale erit.

SIT circulus ABC, cuius diameter AC, eiusque centrum D, à quo linea ad rectos angulos erigatur supra AC; indè à puncto B, quod esse debet in sectione peripheriæ, ducantur lineæ BA, BC, & centro B, interualloque altera illarum BA, BC arcus CGA describatur; sumpto autem quolibet alio puncto E iungatur EA, ad cuius interuallum, facto centro in E, intelligamus arcum AKCH descriptum, qui ad eiusdem circuli semiperipheriam eandem habeat proportionem, quam quadratum ex DA ad quadratum ex EA, tùm denique iuncta EH; dico rectilineum spatium ABFE vtrique spatio æquale esse, nempe menisco GK, & circuli parti FCH. Sed fieri ipsa spatia prius ostendendum est. Iungatur CE; & quia puncta B, & E sumpsimus in perpendiculari DBE ex centro ad diametrum AC erecta patet dictos arcus AGC, AKCH per duos dictę diametri terminos C, & A transire; deindè quia triangulum DEA rectangulum est in D; atque in primo casu latus DA maius est latere DE, in secundo autem minus illo; habebit quadratum ex EA ad quadratum ex AD in primo casu minorem; at in secundo maiorem proportionem, quam angulus BDA ad angulum DEA; quam duo videlicet recti ad angulum tab. 8. fig. 69. & 70.

angulum CEA; imò quam semiperipheria circuli radij EA ad eiusdem circuli arcum CKA; sed vt idem quadratum AE ad ipsum AD, ita eadem semiperipheria circuli radij EA ad arcum HKA eiusdem circuli; ergo in primo casu eadem semiperipheria ad arcum HKA habebit minorem, at in secundo maiorem rationem, quam ad arcum CKA; & ideo in primo casu HKA peripheria maior erit, sed in secundo minor ipsa CKA, constatque propterea in illo punctum H extra, in hoc autem intra circulum ABC cadere; quod cum ita sit secabitur linea CB ab ipsa HFE; atque adeò fient proposita spatia. Hoc itaque præmisso iam quod propositum fuit ostendemus.

Quoniam recta BA dupla est potestate ipsius DA erit quadrans BCGA duplus quadrantis BDA; verum eiusdem quadrantis BDA duplus est etiam semicirculus CBA; quadrans igitur BCGA æqualis est semicirculo CBA; verùm quia quadratum DA ad quadratum AE, videlicet semicirculus CBA ad semicirculum radij AE eandem habet proportionem, quam arcus HKA ad semiperipheriam circuli eiusdem arcus; quam videlicet sector EHKA ad semicirculum eiusdem sectoris, erit semicirculus CBA, quadrans videlicet BGCA æqualis sectori EHKA; quod si commune auferatur spatium, remanebit ipsum FBAE, quod rectilineum est, æquale vtrique & menisco GK, & spatio FHC, quod &c.

PROP. III. THEOR. III.

Iisdem positis si in primo casu DA ad AE fuerit potentia in subsesquitertia, & in secundo subquadrupla proportione, erit arcus CH duodecima pars semiperipheriæ ipsius circuli.

QVia primùm in primo casu ponitur quadratum ex DA ad quadratum EA, vt 3 ad 4; erit arcus HKA ad semiperipheriam circuli eiusdem arcus, vt 3 ad 4, hoc est vt 9 ad 12.

Rursus quia DA quadratum subsesquitertium est ipsius EA; & triangulum DEA in semicirculo existit (quod angulus ad B rectus sit) erit DA latus inscripti trianguli æquilateri, & propterea angulus DEA sexta pars erit quatuor rectorum; ipsius verò duplum, tertia pars erit quatuor rectorum; sed duorum rectorum $\frac{2}{3}$

partes

partes erit; quare etiam circumferentia C K A ad ſemiperipheriam circuli eiuſdem arcus erit, vt 2 ad 3; imò vt 8 ad 12; at inuertendo eadem ſemiperipheria ad eundem arcum erit, vt 12 ad 8; verùm arcus HKA ad eandem ſemiperipheriam fuit, vt 9 ad 12; ergo ex æquali arcus HKA ad arcum CKA erit vt 9 ad 8; indè per conuerſionem rationis, & conuertendo erit differentia ipſorum, nimirùm arcus CH ad arcum CKA, vt 1 ad 8; idem verò arcus CKA ad ſemiperipheriam eiuſdem circuli eſt, vt 8 ad 12; ergo rurſus ex æquali erit arcus H C ad ſemiperipheriam circuli, vt 1 ad 12.

Et in ſecundo caſu, quia ponitur quadratum ex DA ad ipſum ex A E eſſe vt 1 ad 4, erit & arcus HKA ad ſemiperipheriam ipſius circuli, vt 1 ad 4; eſt autem angulus AEC tertia pars duorum rectorum, hoc eſt circumferentia AHC ad ſemiperipheriam eiuſdem circuli eſt vt 1 ad 3, vel vt $1\frac{1}{3}$ ad 4; ergo inuertendo dicta ſemiperipheria ad eiuſdem arcum AHC erit vt 4 ad $1\frac{1}{3}$; ideoq; ex æquali arcus HKA ad arcum AHC erit vt 1 ad $1\frac{1}{3}$; quare AKH ad HC erit vt 1 ad $\frac{1}{3}$; eſt autem ſemiperipheria circuli, cuius arcus AKH ad hunc ipſum arcum, vt 4 ad 1; ergo rurſus ex æquali ſemiperipheria circuli, cuius arcus eſt HC ad hunc eundem arcum erit vt 4 ad $\frac{1}{3}$, ſeu vt 12 ad 1, quod &c.

PROP. IV. THEOR. IV.

Si in vno oppoſitorum ſemicirculorum eiuſdem circuli duo inſcripti quadrati latera applicentur, fiatque in reliquo ſemicirculo arcus, cuius dicta latera ſint radij; triangulum rectangulum iſoſceles, quod ab iſtis applicatis & diametro conſtituitur, ſpatio inter conuexam, & concauam peripheriam interiecto æquale erit.

SIT circulus A B C D, atque A B, B C ſint latera inſcripti quadrati ſemicirculo A B C applicata, itaut ex his, & diametro A C conſtet triangulum A B C rectangulum iſoſceles; tùm verò centro B, interuallo B A, vel ipſi æquali B C arcus A D C deſcribatur intra alium ſemicirculum A D C. Dico triangulum A B C æquale eſſe meniſco D, ei nimirum ſpatio, quod inter concauam peripheriam ſuppoſiti circuli, & conuexam deſcripti arcus *tab. 8, fig. 71.*

 inter-

interijcitur. Est enim ostensum in secunda huius propositione, quod quadrans B A C sit æqualis semicirculo A C D; si igitur auferatur commune spatium remanebit triangulum A B C æquale menisco D, quod &c.

PROP. V. THEOR. V.

Si in quodam semicirculo inscribatur quodlibet triangulum rectangulum; descriptis verò duobus semicirculis, quorum diametri sint latera circa angulum rectum inscripti trianguli, ita vt eorum peripheriæ extra circulum cadant; quod inter conuexam, & concauam peripheriam interijcitur spatium æquale erit inscripto triangulo.

tab.8. fig.72. SIT semicirculus A B C, & inscriptum triangulum rectangulum sit A B C; describantur semicirculi B C D, A B E; dico triangulum A B C duobus meniscis E, D simul sumptis æquale esse. Nam semicirculus A B C super hypothenusam A C descriptus, duobus alijs semicirculis æqualis est, dempto propterea communi spatio, reliquum triangulum A B C æquabitur composito ex duobus reliquis meniscis E, D, quod &c.

PROP. VI. THEOR. VI.

Si in altero oppositorum semicirculorum hemihexagonum inscribatur, in alio verò semicirculo & supra eius basim, segmentum cuiusdam circuli describatur ijs simile, quæ inscriptum semihexagonum supereminent; vnum ex istis simul cum illo spatio inter conuexam, & concauam peripheriam intericcto æquale erit prædicto semihexagono.

tab.8. fig.73. SIT circulus D E, cuius diameter A C, sitque A F C segmentum circuli, simile vni E G C, quod inscripto semihexagono A B E C superstat; dico hoc segmentum E G C vnà cum menisco E F æquale esse hemihexagono A B E C. Quoniam A C quadrupla est ipsius E C potentia; erit figura A F C æqualis duplo segmento E G C, & duobus B E, B A similiter inter se æqualibus; itaque cum semicirculus E semicirculo D sit æqualis, si à semicir-

culo D auferantur tria segmenta CE, BE, BA; & à semicirculo E tollatur segmentum AFC deficiens vno segmento CGE, superer it semihexagonum ABEC æquale menisco FE excedenti segmento EGC, quod &c.

PROP. VII. THEOR. VII.

Cylindri portio duabus semiellipsibus, vel semicirculis contenta, quarum communis sectio sit secunda diameter, vnà cum conuexa cylindri superficie inter easdem semisectiones conicas interiecta, subsesquialtera est cuiusdam ei circumscripti prismatis triangularis.

INtelligatur circumscriptum parallelepipedum, cuidam semicylindro, cuius oppositæ bases sint semicirculi; hoc autem vnà cum sibi inscripto semicylindro secetur transuersè plano aliquo, vt fiat in parallelepipedo sectio BKQA, at in semicylindro BCA, & recta BA sit communis sectio secantis plani, atque parallelogrammi per axem, iuxta quod semicylindrus existit; tum verò per BA planum aliud transeat abscindens vtrunque solidum, faciatque sectionem BLPA in parallelepipedo, & in semicylindro ipsam BDA. Dico, quod portio cylindri contenta duabus semicylindri sectionibus, seu semiellipsibus BCA, BDA, atque ea cylindri curua superficie inter easdem semisectiones conicas interiecta, subsesquialtera est sibi circumscripti solidi (prismatis nempe triangularis, vt ostendemus) contingentis inscriptam portionem in punctis BA, & linea CD; sunt autem eius oppositæ bases triangula AQP, KBL. Secetur BA bifariam in E, iunganturq; CE, ED. Quoniam planum KLPQ contingit portionem cylindricam secundùm rectam CD, estque QK communis sectio planorum KLPQ, BKQA, erit KQ contingens sectionem BCA in C; verùm quia duo plana æquidistantia parallelepipedi, nempe KLPQ, & illud oppositum, in quo recta BA, secuimus plano AK, erit communis sectio QK contingens sectionem BCA in C æquidistans communi sectioni, vel secundæ diametro BA; & ideò iuncta EC erit semidiameter coniugata ipsius BA. Similiter ostendemus LP contingentem sectionem BDA in D, æquidistantem esse eidem BA, proptereaque ED semidiametrum tab.9. fig.74.

metrum esse coniugatam eiusdem BA. Deinde quia KB, QA sunt communes sectiones plani secantis KA, duorumq; æquidistantium triangulorum KBL, QAP (sunt enim partes duorum æquidistantium planorum parallelepipedi) & contingunt ipsa triangula cylindri portionem in punctis BA; erunt duæ rectæ BK, AQ non tantùm parallelæ inter se, verùm etiam contingentes sectionem BCA in punctis BA; ex quo sequitur, quod dictæ BK, AQ sint etiam æquidistantes eidem semidiametro CE. Pariterq; eodem vsi ratiocinio ostendemus rectas BL, AP in ijsdem duobus punctis BA sectionem BDA contingere, & esse inter se, & eidem semidiametro ED parallelas, quare spatia KA, BP erunt parallelogramma, & idcircò QK, PL erunt inter se parallelæ, ac æquales, vtpote æquales vnitertiæ BA, ex quo fit, vt spatium KP parallelogrammum sit; itaque circumscriptum solidum QBP prisma erit, cuius oppositæ bases triangula sunt KBL, QAP. Extendamus insuper per rectam KL, & punctum E planum abscindens prisma, & ei inscriptam cylindri portionem, sitque prismatis sectio triangulum KEL; tum denique per quodlibet assumptum punctum F in linea BA planum aliud agamus æquidistans ipsi CDE secans pyramidem KBLE, & rursus vtrumque dictum solidum, sintque ductorum planorum sectiones GNF, IMF, HFO; & quoniã idem planum KA secat plana inter sese parallela triangulorum QPA, CDE, IMF, KLB, erunt omnes communes sectiones QA, CE, IF, KB, inter se æquidistantes, itemque omnes AP, ED, FM, BL, pariterq; QP, CD, IM, KL; quare, vt BE ad EF, ita KE ad EG, atque LE ad EN. Cum igitur duæ istæ postremæ rationes similes sint, necesse est rectam GN æquidistantem esse ipsi KL. Præterea quia quadratum ex CE ad quadratum ex HF est vt rectangulum AEB ad rectangulum AFB;

21. primi conic.

& in eadem ratione est etiam quadratum ex ED ad quadratum ex FO; erit recta CE ad HF, vt ED ad FO; estque angulus HFO ęqualis angulo CED (quod CE ęquidistet ipsi HF; & ED ipsi FO) triangula igitur CED, HFO similia erunt, & propterea etiam latus HO parallelum erit ipsi CD, quod est latus cylindri, ex quo sequitur eandem HO rectam lineam esse, vtpotè cylindri latus; Itaque cum HO parallela sit rectæ CD, erit item parallela rectis IM, KL, & GN; atque hoc pacto triangula CED, IFM, KBL, GNF, & HOF similia sunt. His ostensis, quia quadratum CE,

hoc

hoc est ipsum I F ad quadratum F H est, vt rectangulum A E B ad rectangulum A F B; erit per conuersionem rationis rectangulum A E B, hoc est quadratum E B ad quadratum E F, vt quadratum I F ad excessum sui ipsius supra quadratum H F; verum, vt quadratum B E ad quadratum E F, ita quadratum K B, seu I F ad quadratum G F; quare vt quadratum I F ad dictum excessum, ita idem quadratum I F ad ipsum G F; & propterea quadratum G F æquale erit excessui quadrati I F supra H F quadratum; hoc est quadratum H F vnà cum quadrato G F æquale erit quadrato I F; Imò triangulum I F M prismatis C L E æquale erit triangulo G F N pyramidis K B L E vnà cum triangulo H F O semicylindricæ portionis; pariterque triangulum C E D eiusdem prismatis æquale erit triangulo semiportionis dictæ C E D B, nempe sibi ipsi; cumque etiam triangulum K B L prismatis æquale sit triangulo pyramidis, hoc est sibi ipsi, erunt omnia triangula semiprismatis C L E æqualia omnibus triangulis dictæ semiportionis cylindri vnà cũ omnibus triangulis pyramidis K B L E: hoc est semiprisma C L E ęquale erit semiportioni cylindri C E D B vnà cum pyramide K B L E, atque adeo totum prisma æquabitur toti portioni C A D B vnà cum duplo dictæ pyramidis; verùm duplum eiusdem pyramidis tertia pars est totius circumscripti prismatis; ergo duæ reliquæ tertiæ partes eiusdem prismatis æquales erunt expositæ portioni cylindri, & idcircò hæc eadem subsesquialtera erit prædicti circumscripti prismatis Q B P, quod &c. *ibidem.*

COROLLARIVM I.

Ex vi huius demonstrationis patet, quod, si descripta illa, cylindri portio secetur quolibet plano H F O æquidistante ipsi C E D, vnumquodque segmentum ipsius, cuiusmodi est H F O B æquale est sibi circumscripto prismati I F L, dempto ex eo pyramidis frusto latente in eodem prismate: pariterque aliud segmentum reliquum æquatur sibi circumscripto prismati Q A M, ablatis tamen pyramidibus K B L E, G N F E.

COROLLARIVM II.

Item constat triangulum compositum ex semidiametris coniugatis dictarum duarum semiellipsium, vel semicirculorum, vnà cum ea parte lateris cylindri inter easdem semidiametros interiecta, hoc est triangulum C E D basi circumscripti prismatis æquale esse.

PROP.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si per eandem rectam iacentem in plano parallelogrammi, quod est basis semicylindri tria eundem semicylindrum secantia plana extendantur, vt sectiones semiellipses fiant, vel semicirculi: quam proportionem habent lineæ iungentes vertices dictarum semiellipsium vel semicirculorum amplectentium portiones cylindricas, eandem inter se obtinebunt portiones ipsæ: eruntque dictæ iungentes in eodem cylindri latere.

tab. 9. fig. 75. SIT semicylindrus, cuius bases semicirculi ABC, IGH; & per rectam ED iacentem in parallelogrammo AH agantur tria plana, quarum sectiones semiellipses sint aut circuli, EBD, EMD, EGD; deinde (cum centra basium sint KL) iungatur KL, quæ erit axis cylindri; Indè à puncto L ducta perpendiculari LB, semidiametro nempe coniugata ipsi AC, transeat per hanc, & axem LK planum semicylindrum secans, quod faciat sectionem LBGK parallelogrammum, & secet plana semiellipsium, vel semicirculorum, vt communes sectiones sint FB, FM, FG; erunt puncta BMG (vt ostendemus) vertices dictarum semisectionum conicarum. Dico portionem cylindri, quam amplectuntur duæ semisectiones EBD, EGD, ad portionem contentam duabus EBD, EMD, esse vt est linea BG ad BM. Intelligamus ductum planum æquidistans parallelogrãmo per axem AH, vt secet cylindrum, eritq; sectio parallelogrammum; & communis sectio huius secantis plani & parallelogrammi LG, nempe recta ON æquidistans erit axi LK, & propterea etiam lateribus cylindri, quę simul sunt in secante plano, ex quo fit, vt omnes lineæ ductæ intra has tres æquidistantes, nempe ST, XY, VZ, PQR similiter secentur à recta ON (sunt enim communes sectiones dicti secantis plani, ac dictarum semisectionum) cumq; dictum planum secans sit ęquidistans parallelogrammo AH, erunt rectę XY, VZ, PR æquidistantes eidem ED, sed linea ST ipsi AC; & ideò sicuti TS bifariam secatur in N ab ipsa BL, imò ab ipsa NO; ita & linea PR bifariam in Q secabitur ab eadem NO, hoc est ab ipsa FG; idem dic de reliquis lineis XY, PR; quare constat rectas BF, MF, GF, esse semidiametros coniugatas diametro ED communi

muni ſemiellipſibus, vel ſemicirculis E B D, E M D, E G D; ideoq; perſpicuum eſt puncta B M G eſſe vertices earundem ſemiſectionum. Itaque (vt tandem propoſitum oſtendamus) cum portio cylindri E G D B ad portionem E M D B ſit vt priſma priori portioni circumſcriptum, cuius baſis æqualis eſt triangulo B F G, ad priſma aliud alteri portioni circumſcriptum baſim habens triangulum ipſi B F M æquale; eſtque vtrique priſmati altitudo communis, dupla nempe perpendicularis eius, quæ à puncto E duceretur ad planum parallelogrammi L G; erunt inſcriptæ portiones inter ſeſe, vt triangulum B F G ad triangulum B F M, imò vt recta G B ad B M, quod &c.

PROP. IX. THEOR. IX.

Oſtendendum eſt in hac ſequenti figura, quod priſma, cuius oppoſitæ baſes ſunt triangula A I 3, D F 6, vnà cum eo priſmate, cuius oppoſitæ baſes ſunt triangula L Y I, E F Z, dempto quadruplo pyramidis, cuius baſis K X M, & vertex V, cum illo priſmate item ablato, cuius baſis triangulum A L 9, vnumq; latus recta A D, æquale eſt duabus cylindri portionibus L 9 8 E 5 G, & L 7 E 5 G.

SIT cylindrus duobus planis diuiſus, ita vt ſectiones A 9 8 D, A G D ſint ſegmenta ellipſium, vel circulorum, quæ ſecent ſeſe ſecundùm rectam A D ſupra centrum V circuli vel ellipſis A G D; ſecta verò bifariam A D in T iungatur T V, quam vtrinque protrahamus, vt occurrat circulo, vel ellipſi A G D in punctis C G; indè ſumpta G S æquali ipſi C T, per puncta V S, & G agantur æquidiſtantes rectæ A D, vt ſunt V M R, L S E, & H G, quæ vtrinque productæ occurrant duabus iunctis A L, D E protractis in puncta I, & F; tum autem duc G 8 latus cylindri, & à punctis I F lineas I 3, F 6 æquidiſtantes eidem lateri G 8, occurrenteſque lineæ tranſeunti per 8 parallelæ ipſi I G F, in punctis 3, 6: iunctis præterea rectis 3 A, 6 D, 8 T, extendamus per lineas 3 I, I A planum ſecans cylindri portionem intra propoſita ſegmenta interceptam, faciatque in ipſius ſuperficie conuexa, oculiſque ſubiecta lineam 9 L. Et quia 3 I parallela eſt cylindri lateri G 8, imò axi eiuſdem cylindri, & recta I L A parallela eſt ipſi G C, cum pla- *tab. 9. fig. 76.*

num C8G per axem extensum, sit æquidistans plano per 3 I, I A; erit recta 9 L latus cylindri, & ideo parallela lineæ G8; Indè ducta à centro V linea V K, diametro nempe parallelogrammi contenti lineis ℞V, V G in angulo ℞V G, agatur in plano trianguli A I 3 linea K X ipsi 3 I æquidistans, & M X, L Y eidem 3 A parallelæ; conueniantque M X, K X in puncto X; recta verò Y 7 Z æquidistet ipsi I F. His suppositis concipiamus prisma, cuius oppositæ bases triangula A I 3, D F 6; itemq; aliud bases habens oppositas triangula L Y I, E F Z; indè pyramidem, cuius basis triangulum M K X, vertex autem punctum V. Dico prædicta duo prismata, dempto composito ex quadruplo dictæ pyramidis, & prismate, cuius basis triangulum A L 9, & altitudo eadem, quam habent prædicta duo prismata, æquale esse duabus cylindri portionibus L 9 8 E 5 G, L 7 E 5 G.

Quoniam quadratum I A æquale est quadratis A L, L I, vnà cum duplo rectanguli A L I, erit quadratum I A æquale quadrato A L vnà cum duplo rectanguli A I L, dempto quadrato I L; sed duplo rectanguli A I L æquatur duplum quadrati M K; ergo quadratum I A æquale erit quadrato A L vnà cum duobus quadratis M K - L I; propterea triangulum A 3 I maioris prismatis æquale erit triangulo A 9 L portionis cylindri, simul cum duplo trianguli M K X pyramidis, dempto triangulo L Y I prismatis minoris (sunt enim hæc triangula inter se similia, & similiter descripta super lateribus dictorum quadratorum). Præterea quia duplex rectangulum B H P, hoc est duplex quadratum O N, superat duplum rectanguli R P H duplici rectangulo Q H P, & quadrato P H bis item assumpto, hic autem excessus æquatur quadrato Q H - Q P + P H; erit duplex quadratum N O maius quam duplum rectanguli R P H quadrato Q H - Q P + P H, vel, quod idem est, duplum quadrati N O - Q H + Q P - P H æquale erit duplici rectangulo R P H; additisq; communiter quadratis R P, P H; quadratum R H æquale erit duplici quadrato N O, vnà cum quadratis Q P, R P - Q H: nam addendo quadratum P H ad - P H nihil remanet. Quare etiam triangulum R 4 H maioris prismatis æquale erit triangulis sibi ipsis similibus, & similiter descriptis super dictis quadratorum lateribus tanquam basibus, nempe duplici triangulo, cuius basis N O prædictæ pyramidis, vnà cum illo, cuius basis R P cylindri portionis inscriptæ maiori prismati, simul

etiam

etiam cum eo triangulo in basi QP constituto, cylindri portionis inscriptæ minori prismati, dempto triangulo QH 2 eiusdem minoris prismatis.

Tandem quia quadratum TG æquale est sibi ipsi vnà cum quadrato SG eodem dempto, erit triangulum TG 8 maioris prismatis æquale eidem triangulo TG 8 portionis maioris cylindri vnà cum triangulo SG 7 minoris cylindri portionis, dempto eodem triangulo SG 7, vtpotè prismatis minoris; Cum igitur omnia triangula AI 3, RH 4, TG 8 &c. semiprismatis maioris, æqualia sint duplo omnium triangulorum pyramidis MXKV, nempe MKX, eorumq; quorum bases NO &c. vnà cum omnibus triangulis, nempe AL 9; ijsque quorum bases RP, TG &c. maioris semiportionis cylindri inscriptæ prædicto maiori semiprismati, simul cum omnibus triangulis, nempe SG 7, ijsque quorum bases QP &c. minoris semiportionis cylindri inscriptæ minori semiprismati LYG, demptis tamen omnibus triangulis LIY, QH 2, SG 7 &c. dicti semiprismatis minoris; erit semiprisma, cuius oppositæ bases triangula AI 3, TG 8 æquale duplo pyramidis, cuius basis triangulum MKX, & vertex V, vnà cum duabus semiportionibus cylindri (quarum maior est illa, quæ intercedit inter duo triangula AL 9, TG 8; altera verò est comprehensa à minori semiprismate TLG) dempto eodem semiprismate. Quod si minus hoc semiprisma addatur communiter, auferatur verò illud, cuius basis triangulum AL 9 in eadem altitudine in qua sunt duo dicta semiprismata, supererit prisma, cuius basis trapetium L 9 3 I in eadem prædicta altitudine, quod vnà cum minori semiprismate æquale erit duplo dictę pyramidis simul cum duabus semiportionibus cylindri, quarum maior latet inscripta sub dicto quadrangulari semiprismate, alia verò sub minori; Et eorum duplicia, hoc est prisma 9 3 IL 6 vnà cum prismate YLIZ erit æquale quadruplo pyramidis, cuius basis triangulum MKX, & vertex V, vnà cum duabus portionibus cylindri L 9 8 ESG, L 7 ESG; si igitur auferatur communiter quadruplum dictæ pyramidis erunt dictæ duæ cylindri portiones æquales solido rectilineo quod remanet ablato prædicto quadruplo, quod &c.



PROP. X. THEOR. X.

Annulus hyperbolicus, cuius sectio per axem sint oppositæ sectiones subsesquialter est cylindri eius, cuius altitudo est eadem annuli, basis verò circulus ille genitus ex asymptotorum conuersione, cuius circumferentia, & annuli ora sunt in eodem plano, atque concentrica.

tab. 9. fig. 77. CIrca eundem axem MN intelligantur hæc solida rotunda, cylindri nempe, quorum per axem rectangula sint CD, LH, TO; coni duo, quorum per axem triangula LGK, SGH; & demum annulus hyperbolicus, cuius sectio per axem sint oppositæ sectiones CBA, EFD, quarum asymptoti LGH, KGS, easque contingant in punctis BF rectæ TBV, RFO; Dico annulum hunc subsesquialterum esse cylindri LH. Ab assumpto quolibet puncto ✠ agatur planum æquidistans circulo, cuius diameter recta LK, secans cylindrum TO, conum LGK, & tympanum hyperbolicum CBADFE; erunt sectiones circuli, quorum diametri existent in eodem plano parallelogrammi CD, ℣Y, ℞Z, QP. Quoniam igitur rectangulum CKE æquale est quadrato GF, hoc est MK; rectangulum verò CKE vnà cum quadrato MK, æquale est quadrato ME; erit quadratum MR vnà cum quadrato MK, æquale quadrato ME, & eorum dupla; quare circulus, cuius diameter TR, vnà cum illo, cuius diameter LK, æqualis erit circulo, cuius diameter CE; & eadem prorsus ratione circulus, cuius diameter VO, vnà cum circulo, cuius diameter SH æqualis erit circulo, cuius diameter AD. Rursus rectangulum QZP, hoc est quadratum GF, imò ipsum ✠Y æquale est simul cum quadrato ✠Z quadrato ✠P, ergo circulus, cuius diameter ℣Y, vnà cum illo, cuius diameter ℞Z æqualis erit circulo, cuius diameter QP; circulus verò BF est communis vtrique solido cylindri, nempe TO, & prædicto Tympano; ergo cum constet, quod circuli omnes cylindri TO, vnà cum omnibus duorum conorum LGK, SGH, sint æquales circulis omnibus tympani hyperbolici CBADFE, erit tympanum istud æquale cylindro TO, vnà cum duobus conis LGK, SGH; sed cylindrus TO æqualis est differentiæ

11. secundi conic.

cylin-

cylindrorum LH, CD; & duo coni SGH, LGK tertia pars sunt simul accepti cylindri LH; Tympanum igitur prædictum æquale erit tertiæ parti cylindri LH, vnà cum differentia cylindrorum CD, LH; & ideò excessus, quo cylindrus CD superat aggregatum tertiæ partis cylindri LH, & differentiæ cylindrorum CD, LH, qui excessus est ⅔ cylindri LH, æqualis erit annulo hyperbolico CBA, DFE, quod &c.

PROP. XI. THEOR. XI.

Portio conoidis hyperbolici, æqualis est conoportionem conoidis continenti, demptis duobus solidis, quorum alterum est conus, cuius axis æquatur dimidio transuersi lateris genitricis hyperbolæ, basis verò est sectio dicti coni continentis contingens portionem, eiusq; basi æquidistans; aliud verò solidum cylindrus est, cuius basis est illa dempti coni, & axis idem conoidis.

SIT conoides hyperbolicum, cuius sectio per axem FS sit hyperbole RFQ; sed coni continentis sit sectio per eundem axem triangulum ABC; erunt igitur lineæ BA, BC asymptoti, & FB semilatus transuersum eiusdem hyperbolæ RFQ. Sit deinde planum contingens conoides in F (quod æquidistans erit plano basis conoidis) & propterea sectio, quæ fit in cono ABC circulus erit, cuius diameter linea ED, & centrum F. Concepto denique in eadem hac basi cylindro, cuius parallelogrammum per axem FS sit EOPD. Dico conoides RFQ æquale esse cono ABC, demptis cono EBD, cylindroque EP. Sumatur in axe FS quodlibet punctum K, per quod planum agatur æquidistans plano contingenti conoides in F, ita vt secet conum conoides continentem, cylindrum, & conoides ipsum; eruntq; sectiones circuli, quorum diametri erunt lineæ NI, LG, MH. Itaque quia rectangulum AQC, hoc est quadratum FD, imò ipsum SP, vnà cum quadrato SQ æquale est quadrato SC; item quia rectangulum NHI, hoc est quadratum FD, videlicet ipsum KG, vnà cum quadrato KH, æquale est quadrato KI; & denique, cum quadratum FD æquale sit sibi ipsi, constat quadrata omnia, imò omnes circuli, quorum diametri AC, NI, ED &c. frusti AEDC coni

tab. 10. fig. 78.

10. secundi conic.

 conti-

continentis conoides æquales esse omnibus circulis circa diametros R Q, M H &c. conoidis, vnà cum omnibus circulis cylindri E P, quorum diametri O P, L G, E D &c.. Quod cum ita sit conus A B C æqualis erit conoidi R F Q, vnà cum cono E B D, & cylindro E P; hoc est conus A B D, demptis cono E B D, cylindroue E P æqualis erit conoidi R F Q, quod &c.

PROP. XII. THEOR. XII.

Si coni frustum intra duo parallela plana interceptum comprehendat conoidis hyperbolici portionem, ita vt vtraq; solida in eadem basi consistant, atque secundùm huius basis circumferentiam se mutuò contingant, portio conoidis æqualis erit coni frusto, dempto ex eo cono illo, cuius altitudo est communis portioni, basis verò communis est circulus.

tab. 10. fig. 79. Circa eundem axem C F intelligantur portio conoidis hyperbolici, & frustum coni, sintque eorum figuræ genitrices A C E hyperbole, & A B D E trapetium, ita vt duo latera A B, D E contingant hyperbolam in punctis A E; latusque B D parallelum ipsi A E in puncto C; Iunctis deinde lineis A C, A D concipiamus conum, cuius triangulum per axem A C sit B A D. Dico conoidis portionem A C E ęqualem esse coni frusto A B D E, dempto ex eo cono B A D.

Sumatur in axe C F quodlibet punctum O, perque illud agatur planum basi A E parallelum, quo plano secentur tria illa, concepta solida, sectiones autem sint circuli I N, L H, I P.

16. tertij conic. Quoniam, vt quadratum contingentis C B ad id contingentis B A, ita est rectangulum H I L ad quadratum I A, erit permutando quadratum B C ad rectangulum H I L, vt quadratum B A ad ipsum A I, vel, vt quadratum B C ad ipsum I K; quadratum igitur B C ad rectangulum H I L eandem habet rationem, quam ad quadratum I K; & proprerea quadratum I K æquabitur rectangulo H I L. 6. secundi. verùm rectangulum H I L, vnà cum quadrato L O æquale est quadrato I O; quadratum igitur I O æquale erit duobus quadratis L O, I K simul sumptis; quare etiam circulus I N, cuius radius I O æqualis erit duobus circulis I P, L H, quorum radij I L, L O.

Iam

Iam assumpta eadem regula A E circuli omnes A E, I N, B D &c. frusti coni A B D E æquales sunt omnibus circulis A E, L H &c. conoidis portionis, vnà cum omnibus circulis I P, B D &c. coni B A D; ex quo sequitur, quod portio conoidis hyperbolici A C E, vnà cum cono B A D æqualis sit frusto A B D E, & dempto communiter cono B A D, erit conoidis portio A C E æqualis frusto A B D E, dempto ex eo cono B A D, quod &c.

PROP. XIII. THEOR. XIII.

Hemisphærij centrum grauitatis est punctum illud, in quo axis sic diuiditur, vt pars, quæ est ad verticem sit ad reliquam, vt 5 ad 3.

SIT hemisphærium A B C, & axis eius F B sectus sit in O, itaut B O ad O F habeat eam rationem, quam 5 ad 3. Dico punctum O esse centrum grauitatis dicti hemisphærij. Intelligatur in eadem basi A C, & circa eundem axem B F cylindrus A D, item & conus E F D, cuius basis E D; secentur verò hæc solida eodem plano H I K M N G parallelo basi A C, vel E D. Iam patet axem B F transire per centrum circulorum omnium A C, H G, E D, cylindri A D; pariterque eundem axem transire per centra omnium circulorum coni D F E, & hemisphærij C B A; & quia circulus E D sibi ipsi æqualis est ac concentricus; itidem circulus H G æqualis est duobus sibi concentricis circulis N I, M K (nam rectangulum H N G, hoc est quadratum G C, siue F Q, vel Q M, vnà cum quadrato Q N æquale est quadrato Q G) & demùm circulus A C æquatur sibi ipsi; erit in axe B F tanquam libra, in puncto B idem pondus, siue ibi suspensus sit circulus E D cylindri D A, siue in eodem puncto grauitet coni D F E circulus D E; eademque ratione in puncto Q erit eadem grauitas, siue ex eodem puncto suspensus sit circulus H G cylindri E C, siue magnitudo composita ex duobus circulis K M, N I coni, & hemisphærij. Demum quia tam circulus A C cylindri æque ponderat in F, quàm ipse A C circulus hemisphærij; liquidò constat omnes circulos E D, H G, A C, &c. cylindri E C idem centrum grauitatis obtinere, ac compositum ex omnibus circulis coni E D, K M &c., & omnibus I N, A C &c. hemisphærij: hoc est patet cylindrum E C concentricum tab. 10. fig. 80.

esse

esse compositæ magnitudini ex cono DFE, hemisphærioque CBA in descripta illa positione manentibus. Itaque in puncto L dimidio axis BF erit centrum grauitatis dictæ compositæ magnitudinis: sumpta modo BP dimidia ipsius BL, quarta videlicet parte ipsius BF, constat punctum P esse coni DFE centrũ grauitatis.

39. primi Lucæ Valerij de cẽtro grauitatis.

Quoniam verò BO ad OF est vt 5 ad 3, erit BF ad FO, vt 8 ad 3, sed ad LO, vt 8 ad 1; quare BL ad LO erit vt 4 ad 1, & PL ad LO, vt 2 ad 1; conus autem DFE ad hemisphærium CBA est vt 1 ad 2; ergo cum sit reciprocè vt DFE conus ad hemisphærium CBA, ita longitudo OL ad LP perspicuum est punctum O esse centrum grauitatis hemisphærij CBA, quod &c.

SCHOLIVM.

Eodem prorsus ratiocinio, quo supra vsi sumus, conoidis hyperbolici centrum grauitatis inuenitur, attenta videlicet vndecima propositione huius, vel etiam duodecima.

PROP. XIV. THEOR. XIV.

Omnis portionis conoidis parabolici centrum grauitatis est punctum illud, in quo axis sic diuiditur, vt pars quæ est ad verticem reliquæ sit dupla.

tab. 10. fig. 81.

SIT portio conoidis parabolici ABC, cuius axis BD secetur in E, ita vt BE dupla sit ED. Dico punctum E esse centrum grauitatis eiusdem portionis. Intelligatur enim triangulum, cuius vertex B, basis verò diameter AC, quod triangulum vnà cum portione conoidis eodem plano FK parallelo basi AC abscindatur, sitque trianguli sectio linea IG, portionis autem esto circulus, cuius diameter KF. Patet omnes circulos conoidis AC, FK &c. concentricos esse omnibus lineis AC, GI &c. trianguli. Item conspicuum est centra vtrarumque magnitudinum in eodem axe BHD reperiri. Itaque quia quadratum AD ad ipsum FH; circulus nempe AC ad ipsum FK est vt linea DB ad BH, imò vt AC ad GI; si axis BD veluti libra concipiatur, erit in eodem puncto ipsius, tùm centrum grauitatis compositæ magnitudinis ex omnibus circulis AC, FK &c. portionis; tùm illud compositæ

22. primi conic. Lemma 22. in libro de dimensione parabolæ Euag. Torricellij.

ex omnibus lineis A C, G I &c. trianguli, hoc est portio conoidis concentrica erit triangulo A B C. Verùm quia trianguli A B C centrum grauitatis est punctum E; erit idipsum centrum grauitatis portionis conoidis parabolici A F B K C, quod &c.

PROP. XV. THEOR. XV.

Solidum rotundum hyperbolicum infinitè latum æquale est cylindro, cuius oppositæ bases sunt solido communes, vnà cum alio cylindro recto, cuius altitudo est semiaxis solidi, semidiameter verò basis est linea æqualis mediæ proportionali inter totum axem, eiusque dimidium oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur, eæque sunt, quæ in eodem plano per solidi axem immisso cernuntur.

SIT hyperbola E B, & asymptoti eius E D, D C contineant angulum rectum E D C, sumptoque in hyperbola E B quolibet puncto B ab ipso ducatur B C æquidistans D E; figuræ verò E B C D E infinitæ longitudinis versus E intelligatur e regione sita E D F G E prædictæ similiter æqualis, adeout linea F D C vnica recta sit, & figura ex ambabus illis composita sit E B C F G E sine fine longa; tum circa axem F C conuertatur composita hæc figura, vt fiat solidum rotundum infinitè latum, eiusque per axem sectio sit figura E B I K L G E. Iam quia hyperbolis G E, E B, I K, L K, asymptoti F D C, K D E communes sunt, erunt dictæ quatuor hyperbolæ sic constitutæ sectiones oppositæ, quæ coniugatæ nuncupantur, & duo ipsarum coniugati axes erunt inter se æquales. Esto igitur eorum alter M D H, & à puncto H ducta linea H S N asymptoto E K æquidistante, iungatur N M, quæ erit parallela rectæ D S, nempe alteri asymptoto F C (est enim M H ad H D, vt N H ad H S) cumque angulus E D C rectangulus H S D ab ipsius diametro D H bifariam secetur, erit rectangulum H S D quadratum, quod cum sit circa diametrum M H alterius rectanguli H N M, hoc etiam quadratum erit; latus verò ipsius H N medium erit proportionale inter totum axem M H, eiusque dimidium H D. Dico vniuersum solidum E F K C infinitè extensum ex partibus E K æquale esse cylindro recto, cuius basis æqualis sit circulo circa semidiametrum H N, axis verò sit tab. 10. fig. 82.

recta

recta D C, vnà cum cylindro G I, cuius axis F C. Intelligantur superficies cylindricæ quotlibet B G L I, H M, Q O, circa eundem axem F C, atque intra solidum infinitè extensum E F K C; & quia rectangula D C I, D R N, D ✠ P sunt inter se æqualia, erunt etiam ipsorum quadrupla, nempè rectangula L I B, M N H, O P Q æqualia inter se. Verùm quia superficies cylindrica G B I L ad circulum, cuius radius X Z, est vt rectangulum L I B ad quadratum X Z, nempe ad rectangulum quadratum M N H, quæ spatia sunt æqualia, erit dicta superficies cylindrica G L I B æqualis circulo, cuius radius X Z; eademque ratione superficies cylindrica M H æqualis erit circulo, cuius radius N H; itemq; superficies Q O circulo, cuius radius T V æqualis erit; & hoc semper verificatur vbicunque accepta sint puncta I N P. Cum igitur omnes cylindricæ superficies G L I B, H M, Q O, &c., æquales sint omnibus circulis, quorum semidiametri X Z, N H, T V, &c. patet vniuersum solidum rotundum infinitè latum E F K C æquale esse cylindro recto, cuius altitudo est D C, solidi nempe semiaxis, & basis circulus, cuius radius S R, seu N M est media proportionalis inter totum axem H M, eiusq; dimidium M D &c. vnà cum cylindro G L I B, circa axem F C, quod &c.

22. secundi conic.

5. primi Euang. Torricelly de sphæra &c.

PROP. XVI. THEOR. XVI.

Sit A M C E semisectio per axem A E solidi prædicti, & applicetur ipsi A E rectangulum B E, itaut B A sit æqualis semiaxi D M oppositarum sectionum, ostendendum est punctum D esse centrum grauitatis plani B E C M A, quamuis infinitæ longitudinis versus C, dempto rectangulo A F.

tab. 10. fig. 83.

Quoniam ostendimus in præcedenti propositione, quod solidum rotundum, & infinitè latum genitum ex conuersione plani F K C circa axem F C est æquale cylindro genito ex conuersione rectanguli Z R circa axem ✠ Z, vnà cum cylindro G I, cuius axis F C, estque C D ad C F longitudine, vt D M ad M N, seu ad X Z potentia; si concipiatur cylindrus, cuius altitudo C F, & basis semidiameter D M; erit hic æqualis cylindro prædicto, cuius axis ✠ Z; & ideò constat conceptum hunc cylindrum æqualem esse solido F K C E infinitæ latitudinis, dempto ex eo cy-

cylindro GI, illo nempe, qui fit ex conuersione rectanguli CL circa axem FC; hoc est, in præsenti etiam figura, liquet cylindrum genitum ex conuersione rectanguli BE circa axem AE æqualem esse solido rotundo, ac infinitæ latitudinis, ex reuolutione plani EFCMA circa eundem axem EA progenito, dempto tamen ex hoc solido, cylindro, cuius semirectangulum ad axem est AF. Momentum igitur rectanguli BE momento plani FCM infinitæ longitudinis versus C æquale erit, si planum vniuersum EBAMCFE super recta EA libretur, & rectangulum AF nullius ponderis concipiatur. Erit igitur in linea finita EA centrum grauitatis prædictorum duorum planorum sic constitutorum, tanquam vnius magnitudinis, & ideò (licet incredibile videatur) cum magnitudo hæc habeat grauitatis centrum, illud erit etiam in diametro GC eiusdem planæ magnitudinis; quare in D communi sectione linearum AE, GC reperitur, quod &c. *ex pulcro lemm. 31. Torricellij in dimens. parabola.*

SCHOLIVM.

Hæc ego Theoremata, quorum nonnulla ex principijs geometricis deduxeram, Caualleriana methodo expeditius demonstraui, quamquam hemisphærij, & conoidis parabolici centra grauitatis rimatus iampridem fuerit geometricè subtilissimus nostri æui Archimedes Lucas Valerius. Fateor methodum indiuisibilium magnum esse in geometria compendium, præsertim in dimensionibus solidorum, quantumuis irregularium, opus plenum ambagibus si geometricis rationibus velimus vti. Incedendum tamen est cautè, contingit enim non rarò, vt ratiocinatio illa Cauallerij minimè succedat, præsertim vbi de superficiebus solidorum rotundorum agitur: en exemplum.

ESto sphœra, cuius axis AB, quæ secetur quibuslibet planis ad axem erectis CD, EF, GH, &c. dicam totam sphœræ superficiem ad sui portionem EBF habere eandem rationem, quam habet circulus ad sui segmentum EBF. Patet enim sectiones omnes CD, EF, GH, &c. esse circulos circa diametros CD, EF, GH, &c. inter se parallelos; quare etiam eorundem circulorum peripheriæ inter se æquidistabunt; itemq; diametri inter se parallelæ erunt. Et quia peripheria circa diametrum CD ad illam *tab. 10. fig. 84.*

circa diametrum E F est vt diameter C D ad E F, pariterque peripheria circa diametrum E F ad peripheriam circa diametrum G H est vt diameter E F ad diametrum G H; erunt coniunctim omnes peripheriæ circa C D, E F, H G, ad omnes peripherias circa E F, G H &c., vt omnes diametri C D, F E, H G &c. ad omnes diametros E F, G H &c.: hoc est tota sphœræ superficies A E B F ad sui partem E B F habebit eam rationem, quam habet circulus ad sui segmentum E B F, quod tamen falsum est; circulus enim A C B D ad sui segmentum E B F minus semicirculo maiorem habet rationem, quam quadratum A B ad quadratum rectæ B E, hoc est quam superficies sphœræ ad sui portionem E B F; nàm circulus, cuius radius A B, ęqualis est toti sphœræ superficiei, circulus verò, cuius radius B E, æquatur superficiei E B F eiusdem sphœræ; quare superficies sphœræ ad sui portionem E B F est vt quadratum ex A B ad quadratum ex B E, seu vt triangulum A B E ad triangulum E I B: ponitur verò esse in eadem ratione circulus A B ad sui segmentum E B F, vel semicirculus A E B ad trilineum E B I; ergo & reliqua spatia in eadem ratione erunt: hoc est segmenta A E C, E B G simul, ad segmentum E B G, erunt vt triangulum A B E ad triangulum E I B, vel rursus vt quadratum A B ad quadratum B E, imò vt aggregatum quadratorum A E, E B ad ipsum E B; sed circuli segmentum, cuius basis A E simile ipsi E B G cadit intra segmentum A C E; ergo segmentum A C E ad segmentum E G B maiorem habebit rationem, quam quadratum A E ad quadratum E B, & coniunctim duo segmenta A E C, E B G ad segmentum E B G maiorem etiam proportionem habebunt, quam duo quadrata A E, E B simul, hoc est ipsum A B ad quadratum E B, vel quam triangulum A E B ad ipsum E B I; quare & duæ simul antecedentes ad duas simul consequentes, hoc est semicirculus ad trilineum A G B I, seu duplum ad duplum, circulus nimirum ad sui segmentum E B F maiorem habebit rationem, quam triangulum A E B ad ipsum E B I, vel maiorem quam quadratum A B ad B E, quod &c.

E contra si conum pro sphæra prædicto ratiocinio subijcias verum deduces, ita vt tota superficies conica ad sui partem intra verticem coni, & planum eius basi æquidistans interiectam sit vt triangulum per axem ad triangulum illud inter dictum verticem, & prædictum planum interceptum, quod

pars

pars est eiusdem per axem trianguli.

Hinc vides, in solidorum rotundorum superficiebus dimetiendis, quam incerta sit methodus cæteroquin ingeniosissima indiuisibilium.

FINIS.

Pag.	*lin.*	*Errata.*	*Correctiones.*
4 *& alibi*	31	eorumdem	eorundem
8	37	Quod si datis duabus rationibus	Quod si dentur duæ rationes
10	*in marg.*	fig. 9.	fig. 10.
10	*in marg.*	fig. 10.	fig. 12.
12	*in marg.*	fig. 10.	fig. 12.
13	13	deriuantium	deriuatorum
15	23	ex ED in EB	ex ED in AB
19	*prima*	*Deleantur hæc verba:*	In inferiori figura eiusdem tertij elementi.
27	15	eadem rationem	eadem ratione
31	4	LK	LM
32	33	℞ ad ✢	℞ ad X
33	12	NIQMHP	NI, QM, HP,
34	29	centtum	centrum
41	6	ad F ad G	ad E ad G
42	*vltima*	. Pariterq;	, pariterq;
43	10	triangula latera	trianguli latera
44	18	CE ad EF	CD ad DF
46	23	& OB	& OE
51	*in marg.*	tab. 1. fig. 5.	tab. 7. fig. 57.
72	13	æquale esse	æqualia esse
75	*vltima*	circuli	circulos

Ad exprimendum *plus* more algebrico, ex penuria signi opportuni +, vsi sumus hoc alio, etsi non vsitato ✢, quo etiam non rarò vtimur in supplementum literarum.

IMPRIMATVR.

Fr. Antonius Maria Cruceius Sac. Th. Magister, & Commissarius Sancti Officij Mediolani.

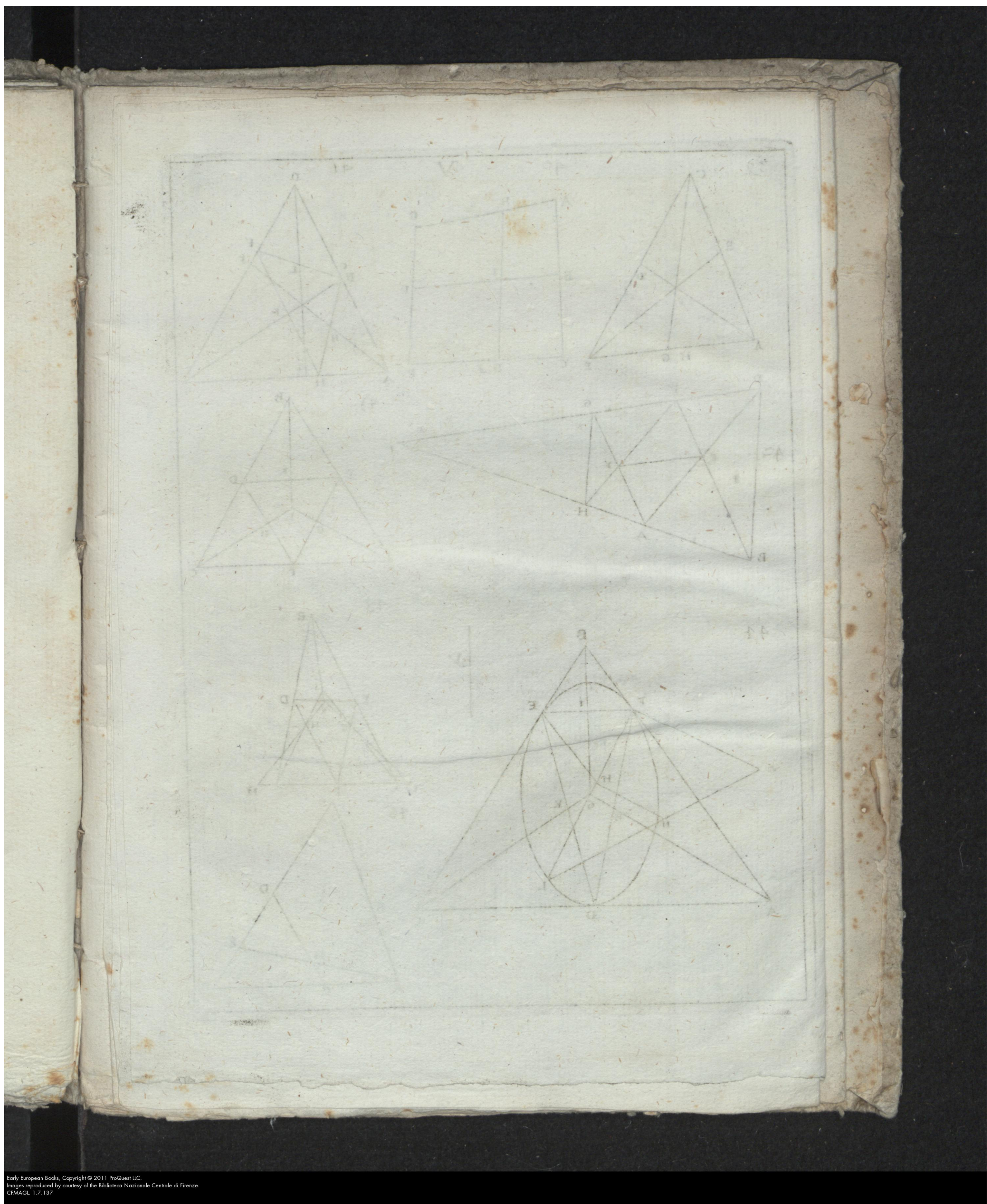
Iacobus Saita Canonicus Ambrosianæ Basilicæ pro Eminentissimo D. D. Cardinali Archiepiscopo.

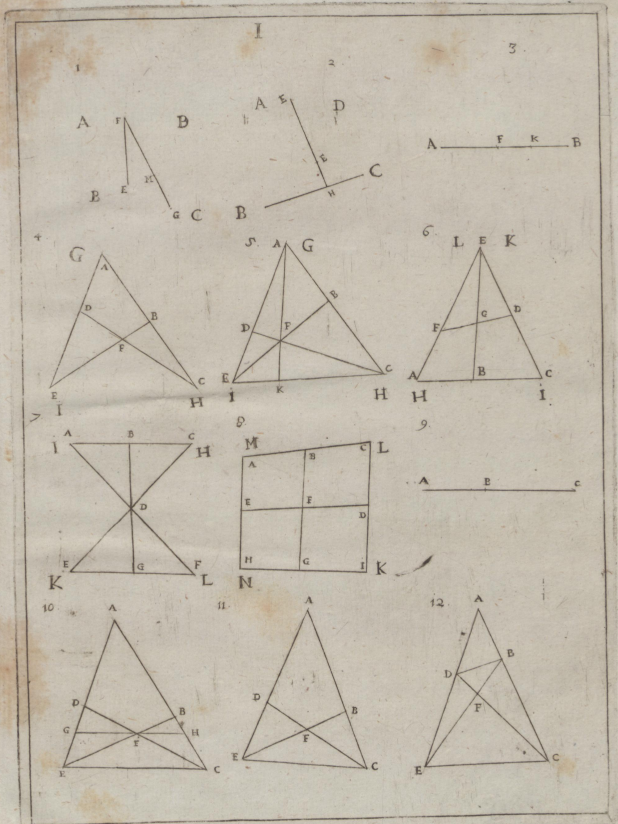
Franciscus Arbona pro Excellentissimo Senatu.

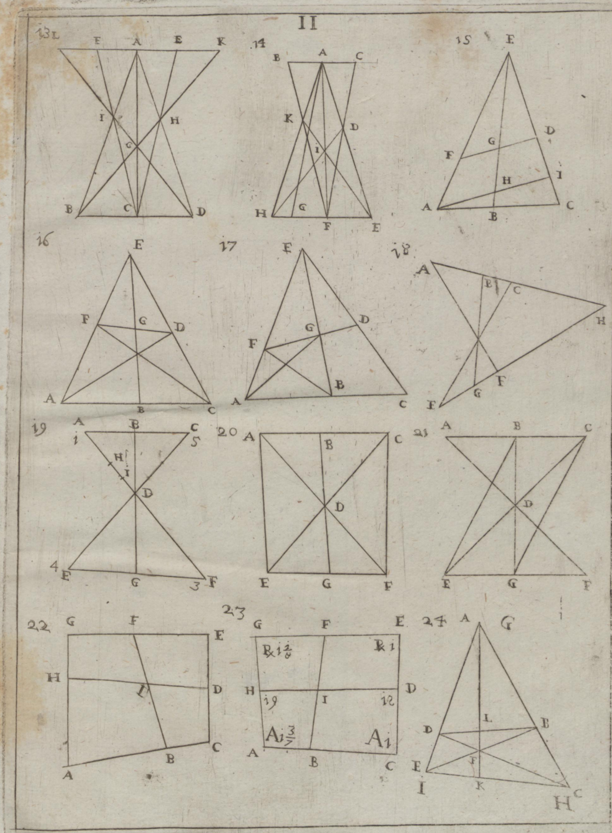


MEDIOLANI

Ex Typographia Ludouici Montiæ.
MDCLXXVIII.




I
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


II
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24



III

25

26

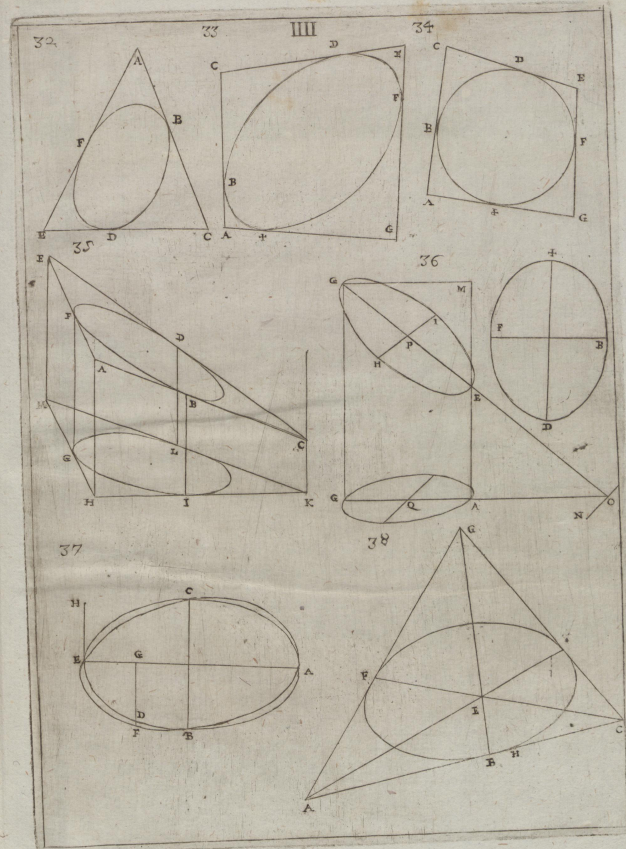
27

28

29

30

31

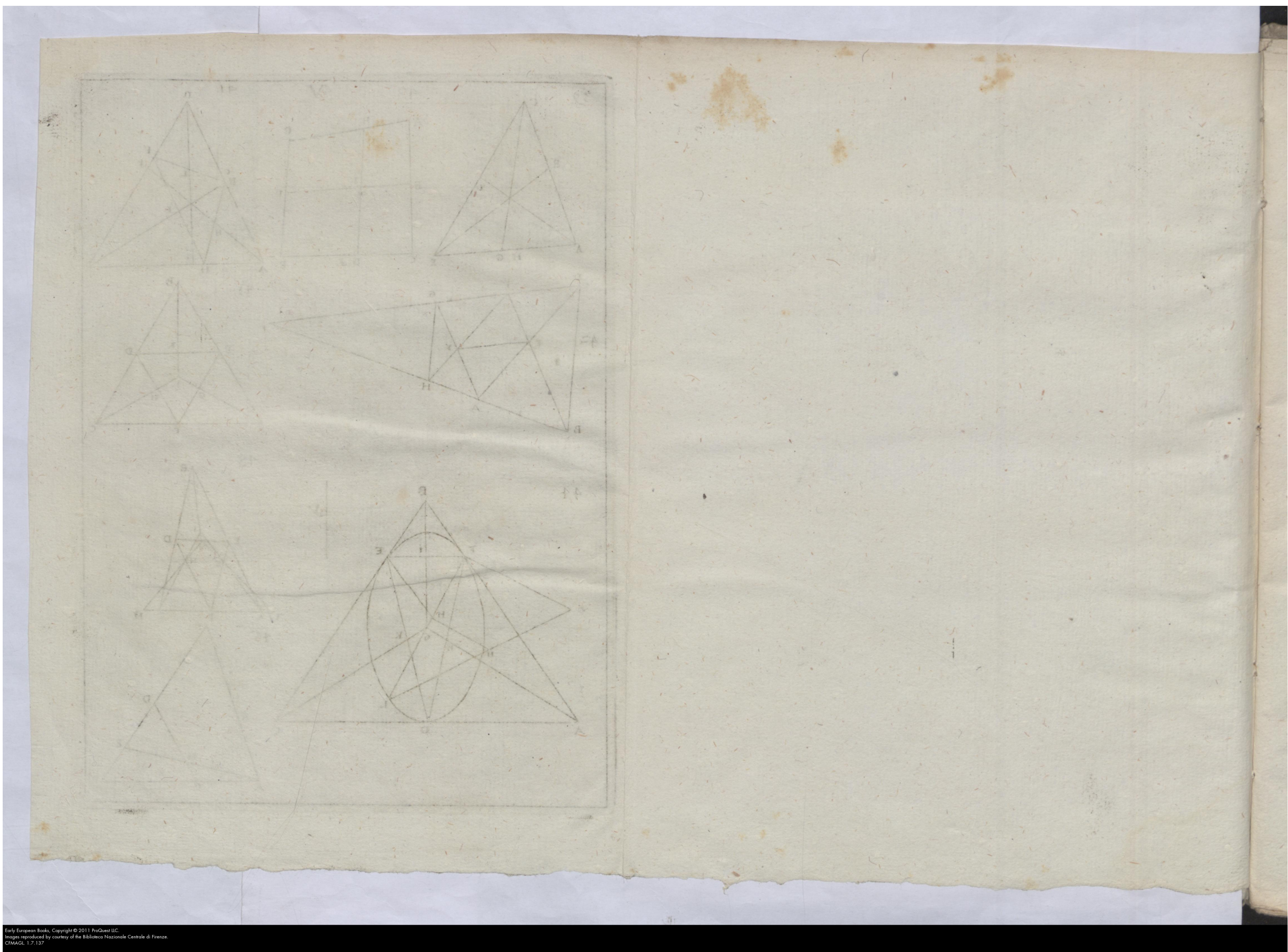

IIII
32
33
34
35
36
37
38

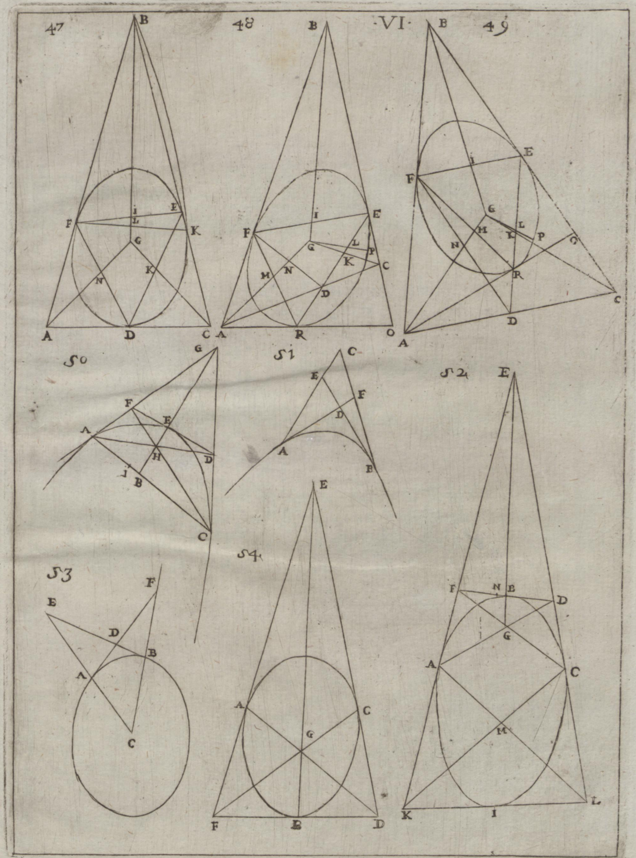
V.

39 40 41

42 43

44 45 46





VI
47
48
49
50
51
52
53
54

VII

55

56

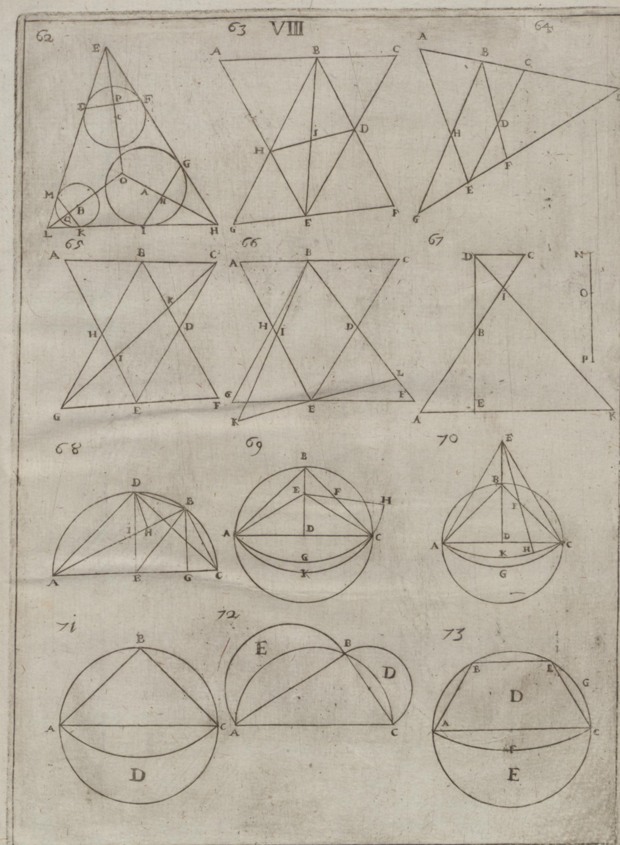
57

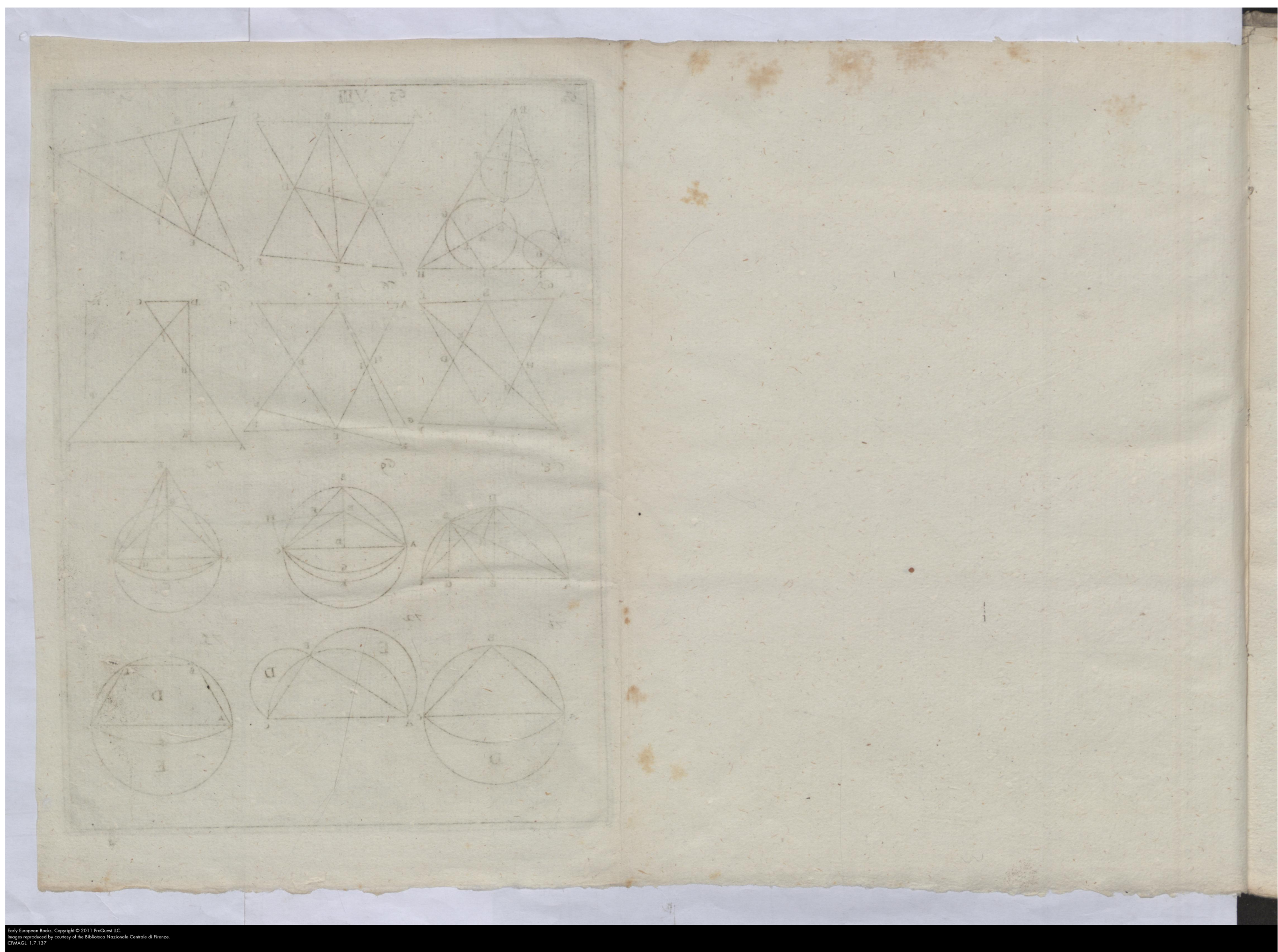
58

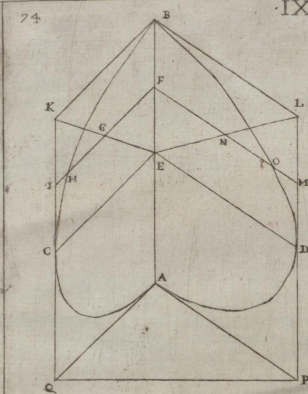
59

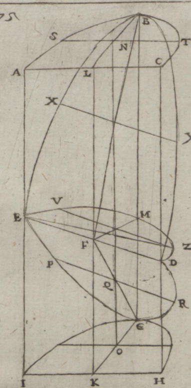
60

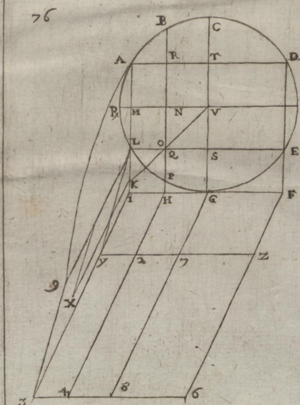
61

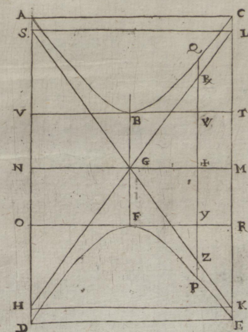

VIII

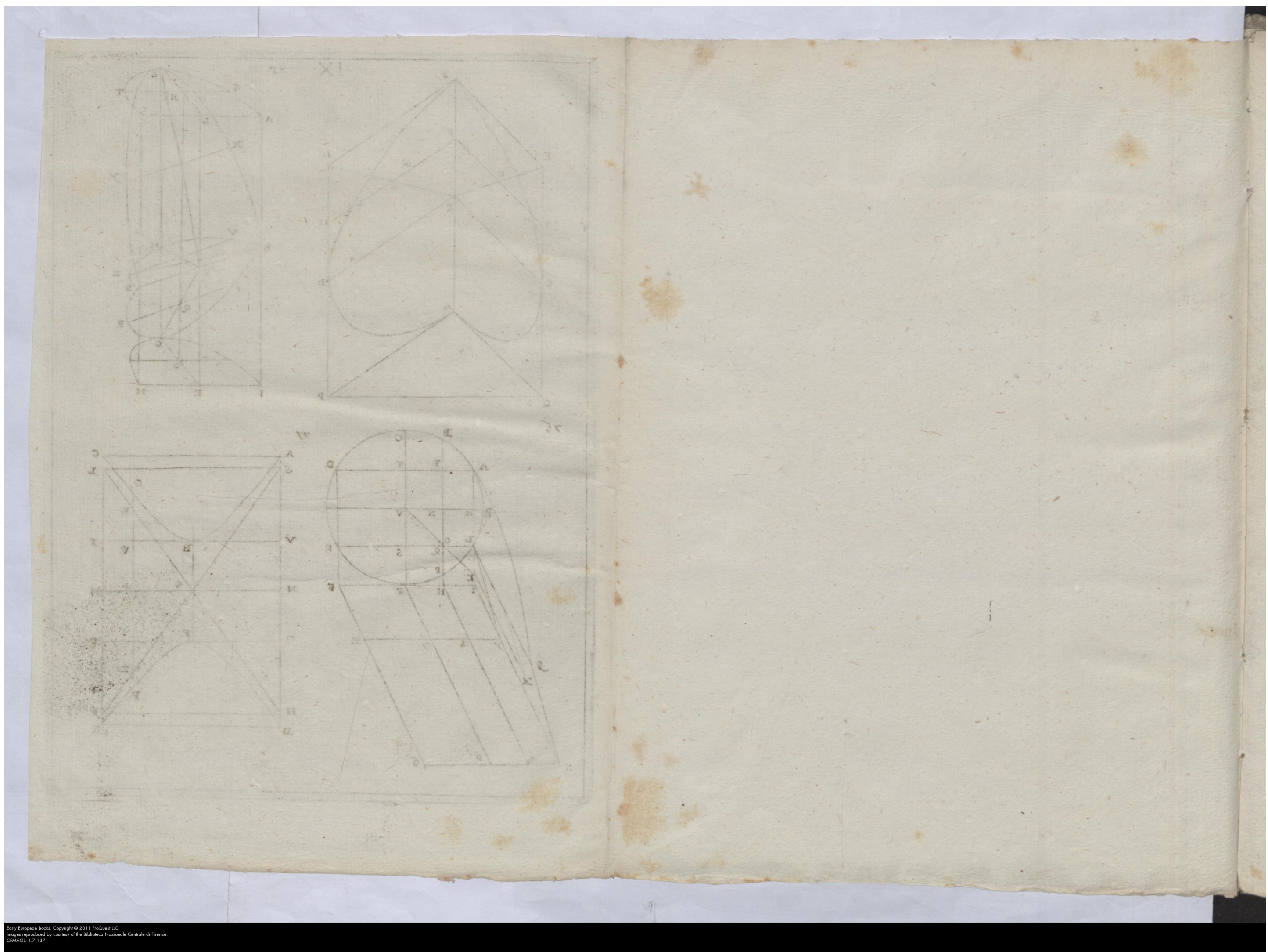


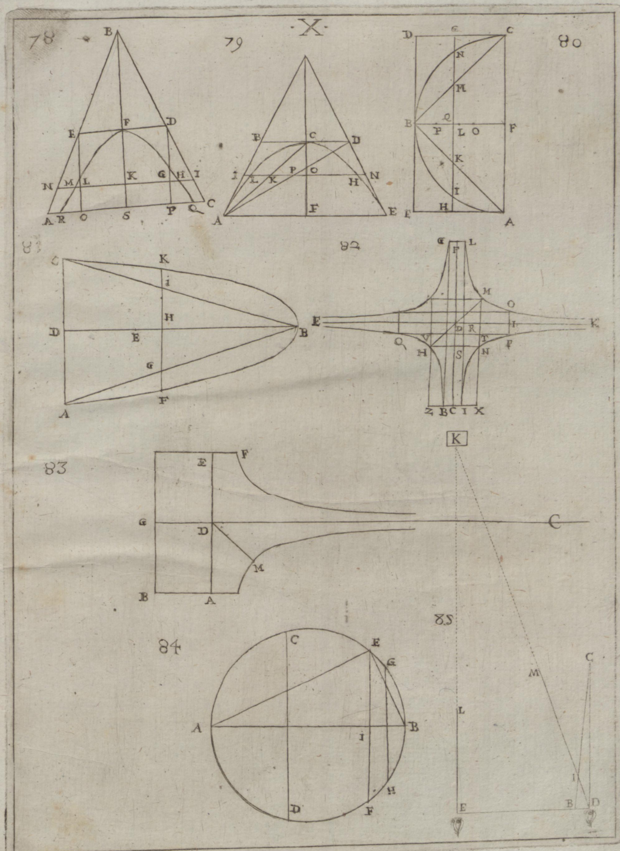

74
B
F
K
L
G
N
O
H
M
E
C
D
A
Q
P


75
B
S
N
T
A
L
C
X
y
V
M
E
F
Z
P
D
Q
R
G
O
I
K
H


76
B
C
A
R
T
D
H
N
V
L
O
Q
S
E
K
P
I
H
G
F
y
2
7
Z
9
X
3
4
8
6


77
A
C
S
L
Q
X
V
B
T
N
G
M
O
F
y
R
Z
P
H
K
D
E




X
78
79
80
83
84

